COURS DE SOUTIEN DE MATHS Tle C : Séance du 29-12-2021

EXERCICE 1

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan Pm d'équation :

$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A(1; 1; 1) appartient-il au plan Pm ?

2. Montre que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 12-2t \\ y = 9-2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3. a. Montre que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan Pm.

EXERCICE 2

Soit m un paramètre réel strictement positif. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
On note (Γ_m) l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $(\ln(m))x^2 + y^2 - 2(\ln^2 m)x - 2(\ln m)y + (\ln^3 m) = 0$.
1. Reconnais (Γ_1).

On suppose dans la suite que $m \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

2. a) Donne une équation réduite de (Γ_m)
 b) Discute suivant m, la nature de (Γ_m).
 c) Soit Im le centre de (Γ_m), que décrit Im quand m décrit $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$?

3. (a) Détermine m_0 pour que (Γ_{m0}) soit un cercle, préciser son centre.
 b) Détermine m_1 pour que (Γ_{m1}) soit une hyperbole équilatère. Précisera son centre, ses sommets, ses foyers et ses asymptotes.

PROBLEME

Partie 1

On considère la fonction g_k de la variable réelle x définie par : $g_k(x) = -2x + 1 + 2x\ln(kx)$. (k est paramètre réel non nul).

1- Détermine suivant les valeurs prises par k, l'ensemble de définition E_k de g_k

2- Calcule les limites de g_k aux bornes de E_k pour $k < 0$ et pour $k > 0$.

3- Calcule la dérivée g_k' de g_k.

4- Etablis le tableau de variations de g_k pour chaque cas.

5- a) Montre que pour $k > 2$ et pour $x \in]0 ;+\infty[$ $g_k(x) > 0$.

b) Montre que pour $k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution négative unique α_0 élément de l'intervalle$]-\infty ; \frac{1}{k}[$.

c) Montre que si $0 < k < 2$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives α_1 et α_2

d) Etudie le signe de $g_2(x)$.

Partie II

Soit la fonction numérique f_k de la variable réelle x définie par : $f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{\ln(kx)}{2x-1}$.

k étant un paramètre réel supérieur ou égal à 2 ; on désigne par (C_k), la représentation graphique de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). Unité graphique : 1cm.

1- Détermine l'ensemble de définition D_k de f_k.

2-a) Montre que la fonction f_2 admet un prolongement par continuité en 1/2.

b) Calcule les limites de f_k aux bornes de D_k

3-a) Calcule la fonction dérivée f_k' de f_k et établir une relation entre $f_k'(x)$ et $g_k(x)$ pour tout x de D_k.

b) Etudie le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variations pour $k = 2$ et pour $k \neq 2$.

4- Représente (C_2) et (C_4) dans le même repère. Précise les asymptotes à chacune de ces courbes