TC

EXERCICE 1

1- Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1}$

a) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

b) Calculer la limite de g en 0.

c) Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$

d) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

e) Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $g(x) > 1$.

2- Soit f la fonction définie par [0 ; + ∞[par : $\begin{cases} f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x] \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat

b) Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $f'(x) = g(x) - 1$ et donner son sens de variation.

c) Calculer la limite de f en + ∞. On pourra remarquer que $f(x) = x\ln(1 + \frac{1}{x})$ et pose $X = \frac{1}{x}$

d) Dresser le tableau de variation de f.

3- Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I ; J)

a) Soit (T) la tangente à(C) au point d'abscisse 1.donner une équation de (T)

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

c) Construire (T) et (C).

EXERCICE 2

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$

1- Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3-a) Calculer l'image de -1 par g.

b) Démontrer que g définie une bijection de $]-\infty ; -e^{-3/2}]$ vers un intervalle K à préciser.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

4- Déduire de ce qui précède que : $\forall x \in]-\infty ; -1[$ $g(x) < 0$ et $\forall x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ $g(x) > 0$

Partie B

On considère la fonction f de ℝ vers r définie par : $\begin{cases} f(x) = x(x\ln|x| + 1) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I; J).

(Unité : 5cm).

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction et calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2-a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Expliciter la fonction dérivée f ' de f et dresser le tableau de variation de f.

3-a) Trouver une équation de la tangente (D) à (la courbe (C) au point O.

b) Démontrer que (D) coupe (C) en deux autres points E et F et calculer leurs coordonnées.

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

4- Démontrer que (C) coupe (OI) en un point K d'abscisse β telle que : $-1,8 < \beta < -1,7$.

5- Tracer avec précision la courbe (C).