LEÇON 9 : SUITES NUMERIQUES

1. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000 CFA qu'ils ont dans leur caisse au premier Janvier 2020.
Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options.
Option1 : le capital placé est augmenté de 2500 CFA à intérêts simples par mois ;
Option2 : le capital placé augmentera de 5 % de mois en mois pendant la durée du placement.
Le budget de la manifestation étant de 400.000 CFA, le président voudrait connaitre l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'Août 2020.
Le major de cette promotion affirme que le problème peut être résolu à l'aide de suites particulières.
Forts de ces informations et voulant aider leur président, les élèves de la promotion terminale décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.

2. RESUMES DE COURS

I. Rappel sur les suites arithmétiques et les suites géométriques

1. Définition d'une suite numérique

On appelle suite numérique, toute fonction de ℕ vers ℝ.

Soit E l'ensemble de définition de cette suite.
La suite est notée par une lettre (u), ou (v), … , on la note aussi $(u_n)_{n\in E}$ ou simplement (u_n), s'il n'y a pas de confusion.

On suppose dans la suite que l'ensemble de définition E est un sous ensemble infini de ℕ.

2. Suites arithmétiques et suites géométriques

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	Une suite (U_n) est arithmétique s'il existe un réel r appelé raison tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n + r$ Exemple : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = U_n - 4 \end{cases}$ $r = -4$	Une suite (U_n) est géométrique s'il existe un réel q appelé raison tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = qU_n$ Exemple : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n \end{cases}$ $q = \frac{1}{5}$
Formule explicite	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},$ $U_n = U_p + (n-p)r$ En particulier : • $U_n = U_0 + nr$	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, et $q \neq 0$ $U_n = U_p \times q^{n-p}$, En particulier :

	• $U_n = U_1 + (n-1)r$	• $U_n = U_0 \times q^n$ • $U_n = U_1 \times q^{n-1}$
Somme de termes consécutifs	Soit $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $k < l$ $S = \underbrace{U_k + U_{k+1} + \cdots + U_l}_{(l-k+1)\ termes}$ On a : $S = (l-k+1)(\frac{U_k+U_l}{2})$	Soit $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $k < l$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $S = \underbrace{U_k + U_{k+1} + \cdots + U_l}_{(l-k+1)\ termes}$ On a : $S = U_k \times \left(\frac{1-q^{l-k+1}}{1-q}\right)$

Exercice 1
1) (u) est une suite arithmétique de raison -3. Détermine une relation entre u_{n+1} et u_n.
2) (v) est une suite géométrique de raison -3. Détermine une relation entre v_{n+1} et v_n .

Solution
1) $u_{n+1} = u_n - 3$
2) $v_{n+1} = -3\ v_n$

Exercice 2
1) (u) est une suite arithmétique de raison 2 et $u_3 = -5$. Exprime u_n en fonction de *n*.
2) (v) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{2}$ et $v_4 = 16$. Exprime v_n en fonction de *n*.

Solution
1) $u_n = (n-3)r + u_3$
$u_n = 2(n-3) - 5$;
soit : $u_n = 2n - 11$.

2) $v_n = v_4 \times q^{n-4}$
$v_n = 16 \times (-\frac{3}{2})^{n-4}$.

Exercice 3
1. (u) est une suite arithmétique de raison -3 et $u_2 = 7$.
   Calcule la somme : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$
2. (v) est une suite géométrique de raison -2 et $v_4 = 16$.
   Calcule la somme : $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21}$

Solution
1. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{20}}{2}\right)$
On a : $u_n = (n-2)r + u_2 = -3(n-2) + 7$; soit : $u_n = -3n + 13$; donc, $u_0 = 13$ et $u_{20} = -47$.
Par suite : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{20}}{2}\right)$
$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 21(\frac{13-47}{2})$
Donc : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 21 \times (-17) = -357$

2. $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21} = v_2(\frac{1-q^{21-2+1}}{1-q})$
On a : $v_n = v_4 \times q^{n-4} = 16 \times (-2)^{n-4}$; donc : $v_2 = 16 \times (-2)^{2-4} = 16 \times (-\frac{1}{2})^2$; soit $v_2 = 4$.
Par suite : $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21} = 4\left(\frac{1-(-2)^{20}}{1+2}\right) = \frac{4}{3}(1 - (2)^{20})$.

II. Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n.

Méthode

Pour démontrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ (n_0 étant un entier naturel donné), on procède en trois étapes :
• On vérifie que la proposition est vraie lorsque $n = n_0$.
• On suppose que la proposition est vraie pour un entier $k \geq n_0$ et on démontre qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k + 1$.
• On conclut que la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exercice

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons $P(n)$ la proposition : « $u_n < 6$ ».

- Vérifions que $P(0)$ est vraie, c'est-à-dire que : $u_0 < 6$.
  On a : $u_0 = -1$. Alors $u_0 < 6$. Donc : $P(0)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel tel que $k \geq 0$.
  Supposons que $P(k)$ est vraie et démontrons que $P(k+1)$ est vraie.
  $P(k)$ est vraie, donc : $u_k < 6$.

On en déduis que : $\frac{1}{2}u_k < 3$,

$\frac{1}{2}u_k + 3 < 3 + 3$,

$\frac{1}{2}u_k + 3 < 6$, c'est-à-dire : $u_{k+1} < 6$. D'où $P(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6$.

III. Suites croissantes, suites décroissantes

Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels et E son ensemble de définition. On dit que :

- la suite (u_n) est croissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n \leq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est décroissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n \geq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est strictement croissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n < u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est strictement décroissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n > u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est constante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n = u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est monotone, lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) définie sur une partie E de $\mathbb{N}$, (c'est-à-dire examiner si la suite est croissante ou décroissante et justifier cette croissance ou décroissance), on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

a) La méthode algébrique

- On étudie le signe de : $u_{n+1} - u_n$
  - Si pour tout n de E, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si pour tout n de E, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

- On compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si pour tout entier naturel n de E, $u_n > 0$.
  - Si pour tout n de E, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si pour tout n de E, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

b) La méthode à l'aide d'une fonction

Si $u_n = f(n)$, alors (u_n) a le même sens de variation que la fonction f sur E.
On étudie donc les variations de la fonction f sur E.

- Si f est croissante sur E , alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur E , alors la suite (u_n) est décroissante.

c) Utilisation du raisonnement par récurrence

Exercice 1

Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = n^2 + 3n$. Démontre que la suite (w_n) est croissante.

Solution

Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n)$
$w_{n+1} - w_n = 2n + 4$; donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n > 0$.
Par suite, la suite (w_n) est-croissante.

Exercice 2

Soit la suite(v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = e^{-2n+1}$.
Démontre que la suite (v_n) est décroissante.

Solution

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Calculons : $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{-2n-1}}{e^{-2n+1}} = e^{-2}$, or $e^{-2} < 1$ donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$.
Donc la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 3

Soit la suite(u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $u_n = \sqrt{\ln n}$.
Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

Solution
Considérons la fonction f définie sur $[2;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $u_n = f(n)$.
$\forall\, x \in [2;\ +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. $\forall\, x \in [2;\ +\infty[, f'(x) > 0$. Donc la fonction f est croissante sur $[2;\ +\infty[$.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

Exercice 4

Soit la suite (t) définie par : $\begin{cases} t_0 = 5 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \sqrt{t_n + 12} \end{cases}$
Démontre que la suite (t) est décroissante.

Solution
Soit $n \in \mathbb{N}$, notons P(n) la proposition « $t_{n+1} \leq t_n$ ».
- Vérifions que P(0) est vraie.

On a : $t_0 = 5$ et $t_1 = \sqrt{17}$; donc $t_1 \leq t_0$; d'où P(0) est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que P(k) est vraie, c'est -à- dire $t_{k+1} \leq t_k$ et démontrons que P($k+1$) est vraie, c'est -à- dire $t_{k+2} \leq t_{k+1}$.

On a : $t_{k+1} = \sqrt{t_k + 12}$ et $t_{k+2} = \sqrt{t_{k+1} + 12}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $t_{k+1} \leq t_k$; donc $t_{k+1} + 12 \leq t_k + 12$; par suite $\sqrt{t_{k+1} + 12} \leq \sqrt{t_k + 12}$; soit $t_{k+2} \leq t_{k+1}$.
Donc P($k+1$) est vraie.
- On conclut que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, t_{n+1} \leq t_n$. Ainsi la suite (t) est décroissante.

Remarque : On peut utiliser le sens de variation de la fonction de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x + 12}$ pour l'étape de l'hérédité.

IV. Suites majorées, minorées, bornées

Définitions
Soit (u_n) une suite de nombre réels et E son ensemble de définition. On dit que :
• La suite (u_n) est *majorée*, s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n de E, $u_n \leq M$.
• La suite (u_n) est *minorée*, s'il existe un nombre réel m tel que pour tout entier naturel n de E, $u_n \geq m$.
• La suite (u_n) est *bornée*, si elle est à la fois *majorée* et *minorée*.

Remarque : On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer qu'une suite est soit minorée, soit majorée, soit bornée.

Exercice 1

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Si pour tout entier naturel n, $u_n < -3$, alors la suite (u_n) est minorée par -3	
2	Si il existe un entier naturel n, tel que $u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est minorée par 0	
3	Si pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$, alors la suite (u_n) est majorée par 2	
4	Si pour tout entier naturel n, $\lvert u_n \rvert < 1$, alors la suite (u_n) est bornée	

Solution

1. Faux   2. Faux   3. Faux   4. Vrai

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n+3n^2}{1+n^2}$.
Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 2.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n - 2 = \frac{n+3n^2}{1+n^2} - 2 = \frac{n^2+n-2}{1+n^2}$; donc : $u_n - 2 = \frac{(n-1)(n+2)}{1+n^2}$
$n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow n \geq 1$, d'où : $\frac{(n-1)(n+2)}{1+n^2} \geq 0$. Donc : $u_n - 2 \geq 0$, c'est-à-dire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 2$.
On conclut donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 2.

Exercice 3

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}}$
Démontre que la suite v est minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

Solution

Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$, on a : $1 \leq 1 + n^2$.

$$\begin{aligned} 1 + n^2 \geq 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{1+n^2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{1+n^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq 4 - \frac{2}{1+n^2} < 4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}} < 2. \end{aligned}$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq v_n < 2$.
Donc, la suite v est donc bornée (minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2).

Remarque

Une variante de cette méthode est l'étude des variations de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(\mathrm{x}) = \sqrt{4 - \frac{2}{1+x^2}}$. Cela permet de justifier que : $\forall x \in [0\,;+\infty[, \sqrt{2} \leq f(x) < 2$ et de conclure que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq v_n < 2$.

V. Limite d'une suite numérique

1. Définition de la limite d'une suite

Exemple introductif

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -1 + \frac{1}{1+n^2}$.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -1 + \frac{1}{1+x^2}$. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

On dit que lorsque n tend vers $+\infty$, la suite (u_n) admet pour limite -1.

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Définition

- On dit qu'une suite (u_n) est convergente lorsqu'elle admet une limite finie.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Propriété

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;\ +\infty[$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, ($l \in \mathbb{R}$ ou l est infini) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^3}$. Calcule la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solution

Soit f la fonction définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(n)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	La suite de terme général $\sqrt{n}$ est convergente.	
2	La suite de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente.	
3	La suite de terme général $\cos n$ est convergente	

Solution

1. Faux 2. Vrai 3. Faux

Exercice 3

Etudie la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{n^2+1}{2+n}$.

Solution
Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x^2+1}{2+x}$ tend vers $+\infty$.
On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

<u>Propriété</u> (unicité de la limite)
Si une suite numérique admet une limite, alors cette limite est unique.

Exercice
Etudie la convergence de la suite numérique de terme général $(-1)^n$.

Solution
Tous les termes de rang pair de cette suite sont égaux à 1 et ceux de rang impair à -1.
Donc cette suite n'admet pas de limite. Elle est divergente.

2. Limites de référence

<u>Propriété</u>
$\lim\limits_{n \to +\infty} a = a \ \ (a \in \mathbb{R})$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$.

3. Opérations sur les limites
Les propriétés concernant les limites de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions numériques à variables réelles demeurent applicables aux limites de la somme, du produit ou du quotient de deux suites numériques.

Exercice
Détermine la limite de la suite (u_n) de terme général u_n dans chacun des cas suivants :
a) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$ b) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

Solution
a) On a :
$\frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \frac{n+1}{n}$.
Doù : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
b) On a : $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.
Doù : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$.

4. Propriétés des suites convergentes et des suites divergentes

<u>Propriétés</u>
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.
- Toute suite croissante et non majorée diverge en $+\infty$.

Exercice 1

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Toute suite décroissante et à termes positifs est convergente.	
2	Toute suite croissante et non majorée est convergente.	
3	Toute suite croissante est nécessairement convergente	
4	Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.	

Solution

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

a) Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

(On pourra utiliser l'inégalité : $\forall\, k \geq 2;\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

c) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Solution

a) On a: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\ ;$$

Or : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} > 0;$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b) En utilisant l'inégalité : $\forall\, k \geq 2;\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,

on obtient : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 1 + (1 - \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

Ce qui donne : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$, car $\frac{1}{n} > 0$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 ; donc elle converge.

Remarque : Euler a démontré que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

VI. Compléments sur les limites de suites numériques

1. Croissances comparées des suites (a^n), (n^α) et $(\ln n)$

Les résultats concernant les limites des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites.

<u>Propriété 1</u>

Suite	Hypothèse	Conclusion
$(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a \in \mathbb{R}$ Suite géométrique de raison a (ou suite exponentielle)	Si $-1 < a < 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$
	Si $a = 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$
	Si $a > 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
	Si $a \leq -1$	alors la suite (a^n) n'a pas de limite
$(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Suite puissance	Si $\alpha < 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$
	Si $\alpha = 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$
	Si $\alpha > 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$
$(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ Suite logarithme		$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n) = +\infty$

Exercice
Pour chaque limite, choisis la lettre correspondant à la réponse juste.

		A	B	C	D
1	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-3} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
2	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
3	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
4	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{2}{e})^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
5	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{5}{6}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
6	$\lim\limits_{n\to+\infty} (7)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas

Solution
1. A ; 2. C ; 3. D ; 4. A ; 5. A ; 6. C

Remarque : Les propriétés de croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites de types (a^n), (n^α) et $(\ln n)$.

<u>Propriété 2</u> (Croissance comparée)
Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.
Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.

Exercice
Calcule la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :
$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, $v_n = n^2 - 2^{n+3}$ et $w_n = \frac{n\times 3^n}{4^n}$.

Solution

- On a : $\frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \frac{1}{\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On a : $(n^2 - 2^{n+3}) = 2^n(\frac{n^2}{2^n} - 8)$.

  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} - 8\right) = -8$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
- On a : $\frac{n\times 3^n}{4^n} = \frac{n}{(\frac{4}{3})^n}$. $\frac{4}{3} > 1$ et $1 > 0$; or si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2. Propriétés de comparaison

Les propriétés de comparaison concernant les fonctions sont applicables aux suites.

- **<u>Propriété 1</u>**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{n^2}{2^n} - 8$ et $v_n = \frac{n^2}{2^n}$.
Justifie que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Solution

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- **<u>Propriétés 2</u>**

Soit (u_n) une suite numérique.

- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -n + \cos n$ et $v_n = n^2 + (-1)^n$.
Calcule la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

Solution

- On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq -n + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+1) = -\infty$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n^2 - 1 \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 1) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

- **<u>Propriété 3</u>**

Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.
S'il existe deux suites (v_n) et (w_n) telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) et (w_n) convergent vers l, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est l.

Remarque

La propriété ci- dessus est appelée « Théorème des gendarmes ».

- **Conséquence**
  Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.
  S'il existe une suite (v_n) telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) converge vers 0, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est l.

Exercice

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{2-(-1)^n}{n\sqrt{n}+1}$.

1) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leq \frac{3}{n\sqrt{n}}$

2) Déduis-en la limite de la suite (v_n).

Solution

1) On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| = \left|\frac{2-(-1)^n}{n\sqrt{n}+1}\right| = \frac{1}{n\sqrt{n}+1}|2-(-1)^n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}+1}(|2| + |(-1)^n|)$.

D'où, $|v_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}+1}(2+1)$; soit $|v_n| \leq \frac{3}{n\sqrt{n}+1}$ (1)

On a aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n\sqrt{n} < n\sqrt{n}+1$, d'où $\frac{1}{n\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\frac{3}{n\sqrt{n}+1} \leq \frac{3}{n\sqrt{n}}$ (2)

D'après (1) et (2), on obtient : $|v_n| \leq \frac{3}{n\sqrt{n}}$.

2)On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}} = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leq \frac{3}{n\sqrt{n}}$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3. Limite d'une suite du type : $v_n = f(u_n)$

<u>Propriété</u>

Soit f une fonction, E son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de E .
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$, $(l \in \mathbb{R})$.

Exercice

Détermine la limite de la suite (v_n)de terme général $v_n = n\, sin\frac{1}{n}$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Posons : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$. Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
On a : $v_n = f(u_n)$.
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

4. Suite récurrente

<u>Propriété</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et (u_n) une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation :
$x \in K, f(x) = x$.

Exercice

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}8 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 + \frac{u_n}{2}) \end{cases}$.

On suppose que la suite (u_n) est décroissante et que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1$.
Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.

Solution

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle converge.
On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{2}x(1 + \frac{1}{2}x)$.
La fonction f est continue sur $[0; 1]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$; donc la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation :
$x \in [0; 1], f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = x.$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow\ x = 0\ ou\ x = 2$
Puisque, $0 \in\ [0; 1]$ et $2 \notin [0; 1]$ donc, 0 est l'unique solution de l'équation :
$x \in [0; 1], f(x) = x.$
Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =\ 0.$

3. EXERCICES

3-1. Exercices de fixation

__Exercice 1__

Soit x un nombre réel. On considère les trois réels u, v, w définis par :
$u = (x^2 - 2x - 1)^2;\ v = (x^2 + 1)^2;\ w = (x^2 + 2x - 1)^2.$
Démontre que $u, v\ et\ w$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

__Exercice 2__

(u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_{35} + u_{39} = 74$ et $u_{18} - u_{13} = 10$.
Détermine le premier terme u_0 et la raison r de cette suite.

__Exercice 3__

$x, y\ et\ z$ sont, dans cet ordre, les trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante.
Calcule ces trois nombres, sachant que leur somme est 63 et la somme de leur carré est $\frac{7}{16}$.

__Exercice 4__

Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$
Démontre que la suite (v_n)définie par $v_n = 3^{u_n}$ est une suite géométrique.

__Exercice 5__

Soit la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in\ \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n \end{cases}$
Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N};\ u_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$

__Exercice 6__

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

Démontre par récurrence que pour tout n, on a : $0 \leq u_n < 2$

Exercice 7

Démontre que la suite (a_n) définie par $a_n = \frac{2n-3}{5n-1}$ est minorée par $-\frac{1}{4}$ à partir du rang 1.

Exercice 8

Soit la suite v définie par : $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N};\, v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 35}$.

Démontre que la suite v est majorée par 7.

Exercice 9

Soit la suite v définie par : $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N};\, v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 35}$

Démontre que la suite v est croissante.

Exercice 10

Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = \frac{n^2+3}{n+1}$.

Étudie la monotonie de la suite (t_n) sur $\mathbb{N}$.

Exercice 11

Dans chaque cas, calcule la limite de la suite (p_n) et déduis-en la convergence de (p_n).

a) $p_n = 1 - \frac{3}{n-8}$; b) $p_n = \frac{e^{n+2}}{n}$; c) $p_n = n^2 \sin(\frac{1}{n})$

Exercice 12

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Relie à chaque élément du tableau de gauche l'élément du tableau de droite correspondant.

Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors •	• (u_n) n'a pas de limite
Si $-1 < q < 1$, alors •	• (u_n) diverge vers $+\infty$
Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors •	• (u_n) converge vers 0
Si $q < -1$, alors •	• (u_n) diverge vers $-\infty$

Exercice 13

Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous.

N°	Affirmations	Réponses
1	Si $v_0 > 0$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.	
2	Si $r < 0$, alors (v_n) diverge vers $-\infty$.	
3	Si $r = 0$, alors (v_n) converge vers v_0.	

Exercice 14

Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = \frac{n^2+3}{n+1}$.

Détermine par deux méthodes différentes la limite de la suite (t_n).

Exercice 15

(a_n) et (b_n) sont des suites telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $10 - \frac{2}{n} \leq a_n \leq \frac{n^3-3}{0{,}1n^3+5}$ et

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|b_n - \sqrt{5}| \leq \frac{7}{3}\left(\frac{e}{4}\right)^n$.

Calcule la limite de chacune de ces suites.

Exercice 16

Calcule la limite de la suite (w_n) définie par : $w_n = \frac{2n^2+\cos n}{n^2-1}$

Exercice 17

Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{3}}}$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{5}}}{2n}$; c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^4}{\left(\frac{1}{7}\right)^n}$; d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{-3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$; e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{-2}}{3^n}$

Exercice 18

Soit la suite (w) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_{n+1} = g(w_n)$ avec $g(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

On admet que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq w_n \leq \frac{1}{4}$ et que la suite (w) est convergente.

Calcule la limite de la suite (w).

3-2. Exercices de renforcement

Exercice 19

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$

1. Détermine la nature de la suite u.
2. Calcule u_1 et u_2.
3. Etudie le sens de variation de la suite u.
4. Exprime U_n en fonction de n.
5. Calcule en fonction de n :
   a) $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   b) $S' = u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$

Exercice 20

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

1. Détermine la nature de la suite u.
2. Etudie le sens de variation de la suite u.
3. Exprime u_n en fonction de n.
4. Calcule en fonction de n : $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.
5. Soit la suite v définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln(u_n)$.
   a) Justifie que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Calcule $P = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n$.

Exercice 21

Soit la suite (u) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$

1. Représente sur l'axe (OI) les 4 premiers termes de la suite(u).
2. Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la suite (u) est majorée par 3.
3. a) Calcule en fonction de u_n: $u_{n+1} - u_n$.

b) Déduis-en le sens de variation de la suite(u).

4. a)Démontre que la suite (u) est convergente.

b) Détermine la limite de la suite (u).

Exercice 22

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + 1 \end{cases}$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé(O, I, J), représente sur l'axe des abscisses les termes v_0; v_1; v_2 et v_3 $(Unité\ graphique\ 2\ cm)$.

2. a) Démontre par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

   b) Démontre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$

   a) Démontre que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) Exprime V_n puis U_n en fonction de n.

   c) Détermine la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 23

Soient(U_n) et (V_n)les suites définies pour tout entier naturel n par :

$U_0 = 9, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3$ et $V_n = U_n + 6$.

1.a) Justifie que (V_n)est une suite géométrique à termes positifs.

   b) Calcule V_n puis U_n en fonction de n.

2. a) Calcule $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ puis $T_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

   b) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

3. On définit la suite (W_n)par , pour tout entier n, $W_n = \ln(V_n)$.

   Démontre que (W_n) est une suite arithmétique.

4. a) Calcule le produit : $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ en fonction de n.

   b) Déduis-en $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

5.Calcule : $Q_n = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n$en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n$.

Exercice 24

Le plan est muni d'un repère orthonormé(O, I, J).

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\epsilon N}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n\epsilon\mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \end{cases}$

1. Construis les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

2. a) Démontre que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-1})$.

   b) Déduis-en que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   c) Détermine le sens de variation de la suite (U_n).

3)a) Démontre que: $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*, U_n + 6 = \frac{1}{2}(U_{n-1} + 6)$.

b) Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n + 6 = \frac{1}{2}(U_0 + 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Calcule la limite de la suite (U_n).

Exercice 25

Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = \frac{n+3}{n+2}$.

1. Pour un entier naturel p donné, détermine un entier naturel n tel que : $1 - 10^{-p} < t_n < 1 + 10^{-p}$.
2. Déduis-en que la suite (t_n) est convergente et détermine sa limite.

Exercice 26

On considère les suites $(U_n)_{n\epsilon N}$ et $(V_n)_{n\epsilon N}$ définies par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \text{ et } V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \end{cases}$

ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. a) Calcule V_0.
   b) Démontre que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
   c) Exprime V_n en fonction de n.
   d) Calcule la limite de (V_n).
2. Exprime U_n en fonction de V_n et déduis-en la limite de (U_n).
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
   $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n-1}$.
   a) Démontre que : $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$.
   b) Justifie que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.
   c) Exprime T_n en fonction de n.

Exercice 27

Soit a un nombre réel donné. On considère les suites (U) et (V) définies par :

- $U_0 = 3, U_1 = 5$, et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = U_{n+1} - U_n$.

I) On pose : a = 1

1. Démontre que la suite (V) est constante et donne sa valeur.
2. Déduis-en que (U) est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.
3. On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ .Exprime u_n puis S_n en fonction de n.

II) On pose : $a = -5$

1. Démontre que (V) est une suite géométrique dont la raison est égale à 7.
2. Exprime V_n en fonction de n.
3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprime en fonction de n, la somme T_n où $T_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.
4. Exprime U_n en fonction de T_n.
5. Déduis-en que la suite (U) est divergente.

Exercice 28

Soit la suite (u) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2} \end{cases}$

1. Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 2$.
2. Démontre que la suite (u) est croissante.
3. a)Démontre que :$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

b) Déduis-en que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$.

4. Détermine la limite de la suite (u).

Exercice 29

Un véhicule coûte 30 000 000 F. Il se déprécie de 20% par an ; c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an.

1. Détermine la valeur du véhicule au bout de 5 ans.
2. On suppose que pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 5% par an.

a) Détermine la somme que l'entreprise doit prévoir pour remplacer le véhicule au bout de 5 ans.

b) On suppose que le véhicule coûte 30 000 000 en 2014, en quelle année le prix du véhicule doublera ?

3-3. Exercices d'approfondissement

Exercice 30

Soit r un nombre réel strictement positif, u le nombre complexe de module r et d'argument $-\frac{3\pi}{4}$.

1. On considère la suite (A_n) de points définie par :

- $A_0 = 0$;
- L'affixe de A_1 est i ;
- $\forall\, n \geq 2, A_n$ est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

On désigne par Z_n l'affixe de A_n.

a) Ecris, pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, une relation entre Z_n, Z_{n-1} et Z_{n-2}.

b) Démontre que : $\forall\, n \geq 2, Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$.

2. Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe s, qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2 .

Exercice 31

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \frac{1}{3} Z_n + \frac{2}{3} i \end{cases}$

1. Pour tout entier n, on pose : $U_n = Z_n - i$

   a) Montre que la suite (U) de terme général U_n est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b) Détermine U_n puis Z_n en fonction de n.

2. a)Exprime en fonction de n la partie réelle (x_n) et la partie imaginaire (y_n) de U_n.

   b) Détermine les limites des suites (x_n) et (y_n) et celle de (U_n).

3. Déduis-en la limite de la suite (Z_n).
4. Sachant que : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $T_n = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$, Calcule S_n puis T_n en fonction de n.

Exercice 32

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n!}e^x$ (n est un entier naturel non nul).

1. Démontre que : si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$.

2. Soit $I_n = \int_{1-x}^{1} \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt$ pour $0 \leq x \leq 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1.

b) En intégrant par parties I_{n+1}, vérifie la relation de récurrence : $I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x}$.

c) Démontre alors que pour tout entier n non nul : $I_n = e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

d) En utilisant la question 1, détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$; déduis-en que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

3. Soit $(u_n)\ et\ (v_n)$ les suites définies pour n entier non nul par :

$u_n = 1 + \frac{1}{2\times1!} + \frac{1}{2^2\times2!} + \cdots + \frac{1}{2^n\times n!}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{3\times1!} + \frac{1}{3^2\times2!} + \cdots + \frac{1}{3^n\times n!}$

Détermine : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 33

1. Démontre en utilisant la formule de Moivre que : $cos(n\pi) = (-1)^n$.

2. Soit la suite$(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\ sinx\ dx$.

a) Prouve à l'aide de deux intégrations par parties que : $J_0 = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

b) En utilisant le changement de variable $t = x - \pi$, démontre que : $J_{n+1} = (-e^{-\pi})\ J_n$.

c) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Prouve que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} J_n$.

a) Justifie que : $\sigma_n = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-x}\ sinxdx$.

b) En utilisant une double intégration par parties, calcule σ_n.

c) En utilisant les résultats des questions 2.b) et 2.c) prouve que : $\sigma_n = \frac{1-(-e^{-\pi})^{n+1}}{2}$ puis calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$.

Exercice 34

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$.

1) Démontre que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α et que cette solution est dans l'intervalle $I =]3; 4[$.

2) a) Démontre que $f(I) \subset I$.

b) Démontre que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

c)Déduis-en que : $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |x - \alpha|$.

3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{7}{2}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontre par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

b) Justifie que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}\ |u_n - \alpha|$.

c) Déduis-en que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{12})^n$.

4. a) Justifie que la suite (u_n) converge vers α.

b) Détermine une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

4. SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 35

À l'approche d'une rentrée scolaire, une banque de la place envoie le message suivant à ses clients « Pour réussir la rentrée scolaire de vos enfants, empruntez jusqu'à 3 000 000 FCFA au taux préférentiel annuel de 6% ».

Un client de cette banque, dont le salaire net à virer s'élève à 480 000 F CFA, désire emprunter 3 000 000 FCFA à rembourser sur 18 mois à raison d'un prélèvement mensuel qui ne doit pas dépasser le tiers de son salaire.

En utilisant tes connaissances mathématiques sur les suites, justifie si ce client peut contracter le prêt ou non.

Exercice 36

Monsieur Zadi, fondateur d'un établissement secondaire a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire annuel de 750.000 F CFA.
Après quelques mois de travail, une grève des enseignants pour la revalorisation de leur salaire amène le fondateur à faire deux propositions de contrat au choix afin de relever les salaires.
- Le premier contrat stipule que les enseignants auront chaque année une augmentation de 4% du salaire de l'année précédente.
- Le deuxième contrat consiste à faire chaque année une augmentation forfaitaire de 30.000 F CFA.

Monsieur Coulibaly, professeur d'Espagnol, veut s'engager pour 9 ans, mais il hésite quant au choix du contrat. Il te sollicite.
En argumentant, détermine le contrat le plus avantageux pour Monsieur Coulibaly.

BONNES ETUDES