

Corrigé

Exercice 1

1.(E): $y' + 2y = 0$ 1.a. $y = ce^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0) = 1$. On a donc $1 = ce^0 = c$ soit $c = 1$.

D'où f est définie par $f(x) = e^{-2x}$.

2.a. La valeur moyenne de f sur $[0; 10]$ est : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$; $\mu = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} e^{-2x} dx$

$$\mu = \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{10} ; \mu = \frac{1}{20} [1 - e^{-20}]$$

$$2.b \mu = \frac{1}{n+1-n} \int_n^{n+1} e^{-2x} dx ; \mu = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_n^{n+1} \mu = \frac{-1}{2} [e^{-2(n+1)} - e^{-2n}] ;$$

$$\mu = \frac{1}{2} [e^{-2n} - e^{-2(n+1)}]$$

$$\mu = \frac{1}{2} e^{-2n} (1 - e^{-2})$$

$$3. U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n}, \quad U_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) ; U_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2} ; U_2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-4}$$

3.b. Pour montrer que (U_n) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul

que tel que $U_{n+1} = q U_n$.

$$U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n} ; U_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2(n+1)} ; U_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n} \times e^{-2} ; U_{n+1} = U_n \times e^{-2}.$$

Donc (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2})$ et de raison e^{-2}

$$3.c \quad U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_{n-1} + U_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \text{ On a donc}$$

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_{n-1} + U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \times \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}.$$

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_{n-1} + U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2(n+1)})$$