Equations différentielles 2^{eme} ordre

Corrigé exercice 3

1-Soit l'équation différentielle : $y''+25y=0$ soit $y''+5^2y=0$. L'équation différentielle (E) est de la forme y'' + w^2y = 0 avec $w=5$. Ses solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$f(x)$ = A cos wx + B sin wx où A et B sont deux constantes réelles.

donc ici : $f(x)=A\cos(5x)+B\sin(5x)$ avec $x\in\mathbb{R}$.

2. a. $f(x)=A\cos(5x)+B\sin(5x)$ donc si $f\left(\frac{\pi}{5}\right)=-3$; or $f\left(\frac{\pi}{5}\right)=A\cos\pi=-A$, alors $A=3$ et si

$f'(x)=-5A\sin(5x)+5B\cos(5x)$; $f'\left(\frac{\pi}{20}\right)=0$ signifie que $-5A\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+5B\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ et

$-5A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+5B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ $-A+B=0$ et $A=B=3$, donc $f(x)=3\cos(5x)+3\sin(5x)$.

2b. $f(x)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(5x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(5x)\right)=\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos(5x)+\sin\frac{\pi}{4}\sin(5x)\right)$ or $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ on a donc

et donc $f(x)=3\sqrt{2}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$.

3a.. $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos t=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $\left\{t=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } t=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}\right.$;

$S=\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi \;;\; \frac{-3\pi}{4}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3b. $f(x)=-3$; $3\sqrt{2}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-3$; $\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

d'après la question précédente , cette équation est équivalente

$\left\{5x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 5x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi \;;\; k\in\mathbb{Z};k'\in\mathbb{Z}\right.$ $\left\{5x=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 5x=\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi \;;k\in\mathbb{Z};k'\in\mathbb{Z}\right.$

$\left\{5x=\pi+2k\pi \text{ ou } 5x=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \;;k\in\mathbb{Z} \;;k\in\mathbb{Z}\right.$ $\left\{x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{5} \;;\; k\in\mathbb{Z} \;;\; k'\in\mathbb{Z}\right.$

$S=\left\{\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5} \;;\; \frac{-\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{5} \;;\; k\in\mathbb{Z} \;;\; k'\in\mathbb{Z}\right\}$

3.c * Cherchons d'abord les solutions de la forme $\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}$ appartenant à $[-\pi/2\,;\pi/2]$

$-\frac{\pi}{2}\leq\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\leq\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\leq\frac{2k\pi}{5}\leq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{10}\leq\frac{2k\pi}{5}\leq\frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow -\frac{7}{4}\leq k\leq\frac{3}{4}$. k' est un entier :

Les seules valeurs possibles sont donc $k=-1$ et $k=0$.

* Cherchons d'abord les solutions de la forme $-\frac{\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{5}$ appartenant à $[-\pi/2\,;\pi/2]$

$-\frac{\pi}{2}\leq-\frac{\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{5}\leq\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\leq\frac{2k'\pi}{5}\leq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{10}\leq\frac{2k'\pi}{5}\leq\frac{6\pi}{10} \Leftrightarrow -1\leq k'\leq\frac{3}{2}$. k' est un entier :

Les seules valeurs possibles sont donc $k' = -1$; $k' = 0$ et $k' = 1$.

$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} \ ; \ -\frac{\pi}{5} \ ; \ \frac{-\pi}{10} \ ; \ \frac{\pi}{5} \ ; \ \frac{3\pi}{10} \right\}$

4. a. $f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $3\sqrt{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, d'après la question précédente , cette équation est équivalente

$\left\{ 5x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ ou \ \ 5x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \ ; \ k' \in \mathbb{Z} \right.$

$\left\{ 5x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ ou \ \ 5x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \ ; k' \in \mathbb{Z} \right.$ $\Leftrightarrow$

$\left\{ 5x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \ ou \ \ 5x = -\frac{\pi}{12} + 2k'\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \ ; k \in \mathbb{Z} \right.$

$\left\{ x = \frac{7\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} \ \ ou \ \ x = -\frac{\pi}{60} + \frac{2k'\pi}{5} \ ; k \in \mathbb{Z} \ ; k' \in \mathbb{Z} \right.$ $\cdot$ $S = \left\{ \frac{7\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} \ ; \ \frac{-\pi}{60} + \frac{2k'\pi}{5} \ ; \ k \in \mathbb{Z} \ ; \ k' \in \mathbb{Z} \right\}$