I-Fonction Logarithme Népérien

Problème 1

Ce problème a pour but de montrer un exemple de courbes représentatives de deux fonctions qui sont asymptotes, puis de calculer une aire comprise entre deux courbes.

Partie A: Détermination d'une fonction

On considère la courbe représentative C ,d'une fonction g définie sur $]0;+\infty[$, dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm . Cette courbe est représentée sur le document fourni en annexe.

Les points d'intersection de C et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (3 ; 0).

1. Soient *a* et *b* deux nombres réels tels que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $g(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x}$.

   En utilisant les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses, déterminer les nombres *a* et *b.*

2. Montrer que g(x) peut s'écrire: $g(x)=x-4+\dfrac{3}{x}$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction *h* définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x^2+1-2\ln x$.

1. Étudier les variations de *h* et dresser son tableau de variations.
2. Calculer *h*(1). En déduire que *h*(x) est strictement positif pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$.

Partie C : Étude de fonction

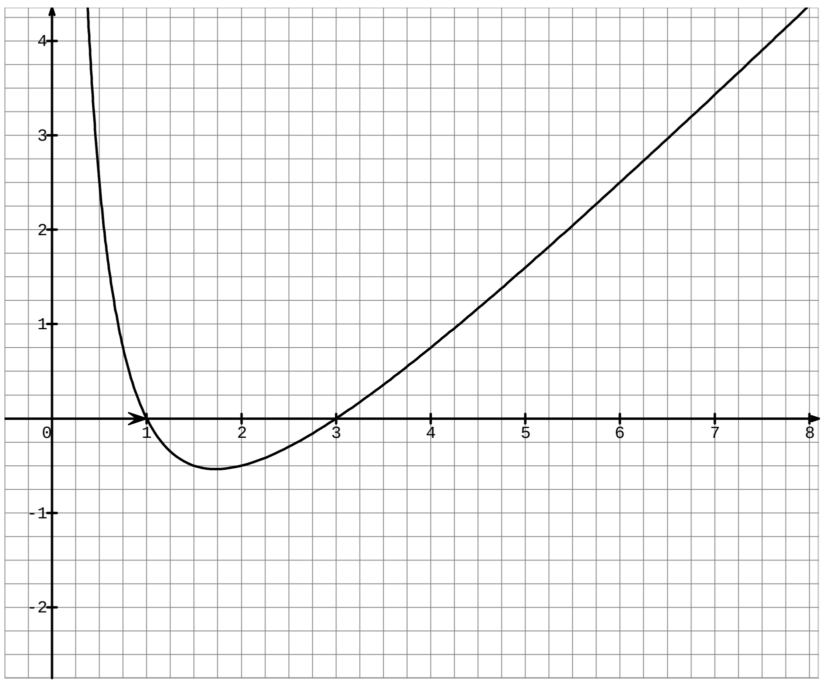
On définit la fonction *f* par : $f(x)=x-4+\dfrac{1+2\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.On appellera Γ la courbe représentative de *f* dans le repère orthogonal du document 1.

1. a. Calculer la limite de *f* (x) lorsque x tend vers zéro.
   b. En déduire que Γ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer la limite de *f* en $+\infty$.
3. pour tout x de $]0;+\infty[$ montrer que $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.En déduire le tableau de variations de *f*.
4. Courbes asymptotes. On rappelle que $g(x)=x-4+\dfrac{3}{x}$
   a. Calculer la limite en $+\infty$ de *k*(x) = *f* (x) − *g*(x) . Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des courbes Γ et C .
   c. Sur $]0;+\infty[$ déterminer la position de la courbe Γ par rapport à la courbe C .
5. Construire la courbe Γ sur le document fourni en annexe et que l'on rendra avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire comprise entre deux courbes

1. Montrer que *f* (x) − *g*(x) admet pour primitive sur $]0;+\infty[$ la fonction *K* définie par : $K(x)=(\ln x-1)^2$
2. Sur le document fourni en annexe, hachurer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.
3. Calculer la valeur de cette aire en cm².



Problème2

On définit la fonction f sur]0 ;+ ∞[par la relation: $f(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{x^2}{2}+2$

<u>Partie A:</u> Etude d'une fonction auxiliaire. On pose, pour $x > 0$, $g(x)=x^3+\ln x-1$
1: Etudiez les variations de g sur]0 ;+∞[
2: Calculez les valeurs suivantes : g(0,5) , g(1) , g(2) , g(e)
(on demande les valeurs exactes puis de donner une valeur approchée à 0,01 près par défaut)
3: Formez le tableau de signes de g(x) sur]0 ;+ ∞ [en le justifiant.
<u>Partie B:</u> Etude de f .
On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1: *a* : Calculez la fonction dérivée de f, fonction notée f '.
b : Donnez une relation entre f '(x) et g(x) .
c : Formez alors le tableau de signes de f ' (x) puis le tableau de variations de f sur]0;+ ∞ [.
d : Etudiez la limite de f en 0 et en + ∞ .
e Montrez que pour tout $x > 0$, on a : $f(x)\leq\frac{3}{2}$
2: A est le point de (C) d'abscisse e.
a : Donnez une équation de la tangente (T_e) à (C) au point A.
b : Tracez la courbe (C) ainsi que (T_e) et la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
<u>Partie C:</u> Etude de l'équation "$f(x) = 0$, $x > 0$"
1: *a* : Montrez que l'équation "$f(x) = 0$, $x > 0$" admet exactement deux solutions que l'on notera *a* et *b* avec $a<b$.
b : Justifiez les encadrements suivants: $0,4358 < a < 0,4359$ et $2,1712 < b < 2,1713$.
c : Donnez en fonction de *a* et *b* le tableau de signes de $f(x)$ sur]0;+∞[
2: On pose alors pour $x > 0$, $F(x)=\frac{\ln(x)^2}{2}-\frac{x^3}{6}+2x$
a : Calculez la fonction dérivée de F sur]0;+ ∞ [.
b : Que pouvez-vous remarquer?
c : Quel est le tableau de variations de F sur]0;+ ∞ [. Justifiez votre réponse!

PROBLÈME 3

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+2+\ln x}{x}$

<u>Partie A</u>

1. Il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C . Le prouver par le calcul.
2. a) Vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c) En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la page 3. a) Prouver que, pour tout x de $]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que f ' (x) s'annule en changeant de signe en e^{-1}.
c) Etablir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

d) Tracer La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

<u>Partie B</u>

1.Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+2}{x}$ et H la courbe représentative de g .

a) Etudier rapidement la fonction g sur $]0;+\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variation).

b) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H .

2. a) Calculer $f(x)$ □□$g(x)$ et étudier son signe.
   b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.
   c) Etudier la position relative des deux courbes C et H .

Placer le point K et construire la courbe H dans le repère précédent.

Partie C

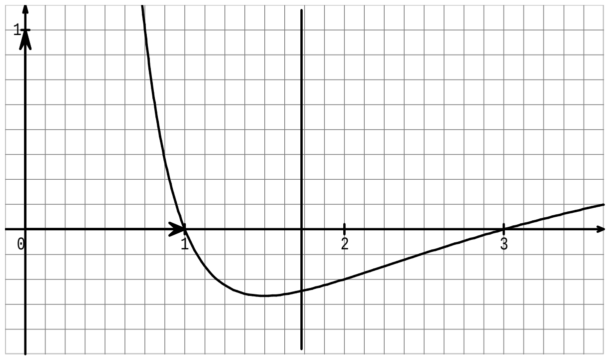
1. Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$. Vérifier que u est une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$. soit $A(\alpha)=4[u(\alpha)-u(1)]$. On note *A(□)* l'aire du domaine limité par les courbes C et H et par les droites d'équation $x=1$ et $x=\alpha$. Calculer $A(\alpha)$ en cm^2.

3. Résoudre l'équation $A(\alpha)= 8\ cm^2$. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique

PROBLEME 4

On considère la fonction g définie sur $]0.+\infty[$, dont la représentation graphique (C) obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure (1) ci-contre.

On précise que la courbe (C) ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite (Δ) qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes :



I - A partir de cette représentation graphique :
Déterminer :
a) la limite de g(x) lorsque x tend vers 0,
b) la limite de g(x) lorsque x tend vers l'infini;
2 - Dresser un tableau donnant le signe de g(x) lorsque x décrit l'intervalle $]0.+\infty[$

II - On admet que $g(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2}$ où a , b et c sont trois nombres réels.

1 - En calculant la limite de $\frac{ax^2+bx+c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que a = 1.

2 - Lire g(1) et g(3) sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.

3 - Résoudre ce système et exprimer g(x) en remplaçant a, b et c par leur valeurs.

<u>PARTIE B :</u> Etude d'une fonction

I - On considère la fonction f définie sur $]0.+\infty[$ par $f(x)=-\frac{3}{x}-4\ln x+x$

1 - a) En mettant $\frac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de f(x), montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

   b) En mettant $\frac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$

2 - a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ = g(x).
   b) Utiliser les résultats de la partie A pour en déduire le tableau de variation de f.
   c) Calculer les valeurs exactes de $f(1)$ et $f(3)$.

II - En utilisant le tableau de variation de f, justifier que l'équation $f(x) = 0$

1 - a) n'admet pas de solution dans l'intervalle] 0 ; 3] ,
   b) admet une solution unique notée □, dans l'intervalle [3 ; 10] ,
   c) n'admet pas de solution dans l'intervalle]10 ; $+\infty$ [,

2 - Compléter le tableau (document à rendre avec votre copie) et en déduire un encadrement d'amplitude 1□□□ de □.

<u>Tableau à compléter</u>

x	9,15	9,16	9,17	9,18	9,19	9,20	9,21	9,22	9,23	9,24	9,25
f(x)											

On donnera les valeurs arrondies de $f(x)$ au millième près.

<u>PARTIE C :</u> Calcul d'aires

1- Montrer que $f(\sqrt{3})=-2\ln 3$ (détailler les calculs sur votre copie).

2- Le tracé de la courbe (C) représentant g dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donné sur la figure (2).

(Document à rendre avec votre copie).

a) Soit D le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe (C) d'une part et les droites d'équations : $x=1$ et $x=3$ d'autre part.

Calculer la valeur exacte de son aire A exprimée en unités d'aires. (On rappelle que $g = f'$)

b) Tracer la droite (D) d'équation x = $\sqrt{3}$ et montrer qu'elle partage le domaine D en deux domaines d'aires égales.

PROBLEME 5

Partie A : Etude du signe de $g(x)=x^3-1+2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

(ln x désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer g'(x) et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées). Calculer g(1).
3. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

(unités :3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1.a Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1.b Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à (C).

Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.

1.c Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

1.d En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

1.e Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C).

Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

1.f Tracer dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C) et les droites (D).

2.a Montrer que la fonction H définie par : $H(x)=\dfrac{-1}{x}\left(1+\ln x\right)$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

2.b Soit Δ le domaine plan limité par (D), (C) et les droites d'équation $x = 1$ et $x=\sqrt{e}$. Hachurer Δ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm², de Δ; en donner une valeur approchée au mm²