

PROBLEME 6

PARTIE A. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x - x^2$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

PARTIE B. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$.

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement cette limite. b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - c. Justifier que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe (C).
 - d. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).
 2. a. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
 3. a. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) tel que la tangente en ce point soit Parallèle à l'asymptote (D). b. Déterminer une équation de la droite (T), tangente à la courbe au point d'abscisse e .
 4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1[$.
On appelle B le point d'abscisse α .
 - c. Montrer que, sur l'intervalle $[2; 3]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée β .
 5. Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, Placer les points A et B puis tracer les droites (D), (T) et (C).
- NB : On donne $\beta = 2,3$ et $\alpha = 0,5$

PROBLEME 7

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 5 + 5 \ln x$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g .

1. Calculer $g'(x)$ pour x dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Etudier le signe de $g'(x)$ et donner le sens de variation de la fonction g (l'étude des limites n'est pas demandée).
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1; 5]$.
On note α cette solution.
- b. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α .
3. Etudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-5) \ln x}{x}$. On peut donc aussi écrire :

$$f(x) = \frac{1}{x}(x-5) \ln x \text{ ou encore } f(x) = \ln x - \frac{5 \ln x}{x}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

- b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 2.a. Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$.
- b. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
- a. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1.
Donner une équation de la droite D tangente en A à la courbe C .
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées.
- b. Tracer la droite D et la courbe C .

PARTIE C

1. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x - \frac{5}{2}(\ln x)^2$.
- Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .
2. a. Hachurer l'aire du domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
- b. Déterminer graphiquement une valeur approchée au cm^2 de l'aire du domaine.
- c. Calculer la valeur exacte, en cm^2 de $A = -4[F(e) - F(1)]$.

PROBLEME 8

Soit $g: x \mapsto 2x + 3 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

- 1) Etudier la fonction g
- 2) Montrer que (C_g) admet deux asymptotes verticales que l'on précisera.
- 3) Montrer que la droite $(D): y = 2x + 3$ est asymptote oblique à (C_g) puis étudier les positions relatives de (C_g) et (D)
- 4) Montrer que le point $O'(0;3)$ est un centre de symétrie de (C_g)
- 5) Tracer (C_g) dans un repère orthogonal (O, I, J) . Unité : 1cm sur (OI) et 0,5 sur (OJ)