## Problème6

Le but du problème est d'étudier la position relative de deux courbes et de calculer l'aire du domaine plan

compris entre ces dernières. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques 5cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

Sur la feuille réponse ci-jointe (cf. en dernière page), ont été tracées les courbes représentatives $C$ et $\Gamma$ respectivement des deux fonctions $f$ et g , définies pour tout réel $x$ de l'intervalle ]0, 3], Par :

$f(x) = x - \ln x$ et $g(x) = x - (\ln x)^2$

***<u>Partie 1 : Étude des fonctions f et g</u>*** .

1. (a) Déterminer, en justifiant vos calculs, la limite de $f$ en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe $C$ ?

   (b) On désigne par $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur ] 0, 3].

   Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de $f$ sur ] 0 , 3].

2. On désigne par $g'$ la fonction dérivée de $g$ sur ] 0, 3]. Calculer $g'(x)$. En admettant que $(x - 2\ln x)$ est positif sur ] 0 , 3] , en déduire que g est strictement croissante sur ] 0 , 3].

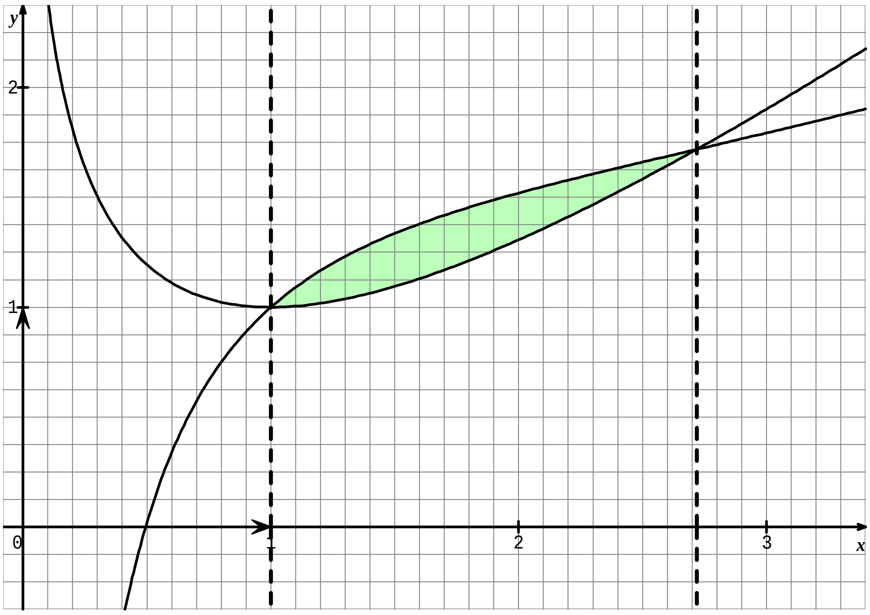
3. Désigner sur la feuille-réponse *(cf. ci-dessous)*, la courbe $C$ et la courbe $\Gamma$ .

**Partie 2 : Position relative des deux courbes.**

1. (a) Résoudre sur ]0, 3], l'équation $g(x) = f(x)$.

   (b) En déduire les coordonnées des points d'intersection $M$ et $N$ des courbes $C$ et $\Gamma$ .

   Placer $M$ et $N$ sur la feuille-réponse.




2. (a) Résoudre sur ]0, 3], l'inéquation $g(x) \geq f(x)$.

   (b) En déduire la position relative des courbes $C$ et $\Gamma$ sur l'intervalle [1 , e].

**Partie 3: Calcul d'une aire.**

On désigne par $D$ l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$1 \leq x \leq e$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$

et par $A$ son aire exprimée en $cm^2$.

On admet que, en unités d'aire,

on a: $\int_1^e (g(x) - f(x))dx$.

1. Hachurer $D$ sur la feuille-réponse.
2. Soit la fonction $H$ définie sur [1, e] par: $H(x) = -x(\ln x)^2 + 3x\ln x - 3x$.

a) Vérifier que la fonction $H$ est une primitive de la fonction $(g - f)$ sur [1, e].

b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de $A$.

c) En donner une valeur approchée au $mm^2$ près par excès.

## PROBLEME 7

### Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = ] 0; $+\infty$ [ par : $g(x) = -4\ln x + x^2 + 6$

( où ln désigne le logarithme népérien).

1.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$.

b. Montrer que $g'(x) = 0$ sur I pour la seule valeur $x = \sqrt{2}$ .

| $x$ | 0 | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | – | 0 | + |
| $g(x)$ | ↘ | $g(\sqrt{2})$ | ↗ |

c. Etudier le signe de $g'(x)$ sur I.

d. montrer que le tableau de variation de la fonction g est donné par

2. a. Calculer la valeur exacte de $g(\sqrt{2})$.

b. Montrer que g est fonction positive sur l'intervalle I

c. Etudier les limites de g(x) en 0 et en $+\infty$, et donner le tableau de variation complet de la fonction g.

***<u>Partie B</u>***

On se propose d'étudier la fonction $f$ définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ . En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$).

4.soit ($\Delta$) la droite d'équation $y=\frac{x}{4}$. On considère la fonction $h$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-\frac{x}{4}$.

*a*. Démontrer que ( $\Delta$ )est asymptote à la courbe C.

*b*. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et $\Delta$

*c*. Etudier la position relative de C et $\Delta$ sur $]0\,;+\infty[$

5. *a*. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\left]\,0\,;+\infty\right[$ . $f'$ est la fonction dérivée de la fonction $f$

*b*. Vérifier que pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{4x^2}$.

*c*. Déduire de la partie A le sens de variation de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.

6. Déterminer une équation de la tangente (T ) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

7. Tracer C , (T ) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

8. Démontrer qu'il existe un seul réel $\alpha$ de l'intervalle $[1\,;2]$ tel que $f(\alpha)=0$.

à l'aide de la calculatrice et en justifiant votre réponse Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

***Partie C :***

Soit $k$ la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $k(x)=(\ln x)^2$

1. On désigne par $k'$ la fonction dérivée de la fonction $k$ .
Calculer $k'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. En déduire une primitive $H$ de la fonction $h$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ qui s'annule quand $x$ vaut 1 .

3. Résoudre dans □ l'équation $u(u+1)=0$ ,et en déduire les solutions de $H(x)=0$ dans l'intervalle I.

4/ On considère la fonction $h$ définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par $h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$.

a. En remarquant que $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x).u(x)$, déterminer une primitive $H$ de $h$.

b. Hachurer sur le graphique la partie $E$ du plan limitée par la courbe C , la droite $D$ et les droites d'équation $x=\sqrt{e}$ et $x=$ e.

c. Calculer en cm$^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe C , la droite $D$ et les droites d'équation $x=\sqrt{e}$ et $x=$ e. Donner la valeur exacte .

## PROBLÈME 8

***Partie A***

1) On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]\,0;+\infty\,[$ par : $f(x)=ax^2+bx-2\ln x$ , où $a$ et $b$ sont deux nombres réels. On appelle C la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Sachant que la courbe C passe par le point A ( $1\,;-\frac{13}{2}$ ) et que le coefficient directeur de la tangente en A est égal à $-6$, Déterminer les valeurs des nombres $a$ et $b$.

2) Pour la suite du problème, on prendra $f(x)=-2\ln x+\frac{5}{2}x^2-9x$.

a) Déterminer la limite en 0 de la fonction $f$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b) Vérifier que l'on peut écrire : $f(x)=x^2\left(-2\frac{\ln x}{x}+\frac{5}{2}-\frac{9}{x}\right)$. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $f$.

***Partie B***

1) On désigne par $f'$ la fonction dérivée de $J$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

a) Calculer *f '(x).*

b) Étudier le signe de $f'(x)$ .

c) Dresser le tableau de variation de la fonction $J$ sur l'intervalle $]\,0; +\infty\,[$

2) a) Démontrer que, dans l'intervalle [3; 4], l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée $\alpha$ .

b) Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 0,01 de $\alpha$ .

3) Déterminer une équation de la droite D tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

4) Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la droite $D$ et la courbe C.

***Partie C***

1) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x - x$ .
   Expliciter la dérivée $g'$ de la fonction $g$.

2) Déduire de la question précédente une primitive $F$ de la fonction $J$ sur l'intervalle $]\,0 ; +\infty\,[$.

3) On appelle $A$ la partie du plan située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 5$ ($\alpha$ est défini à la question B. 2).Hachurer sur la figure la partie $A$.

b) On désigne par A l'aire, en unités d'aire, de la partie $A$. Calculer A en fonction de $\alpha$ puis calculer une valeur approchée de A en prenant 3,88 comme valeur approchée de $\alpha$ .

## Problème 9

***Partie*** A On considère la fonction $g$ définie sur $]\,0 ;+\infty\,[$ par $g(x)=-2x^2-1+\ln x$ .

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x$ de $]0 ; +\infty[$. Étudier son signe sur $]\,0 ;+\infty\,[$.
2. Dresser le tableau de variations de $g$ sur $]0 ; +\infty[$. (On ne demande pas les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition).
3. En déduire que pour tout $x$ de $]0 ; +\infty[$, $g(x)<0$ .

***Partie B*** Soit $f$ la fonction définie sur $]\,0 ; +\infty\,[$ par $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\ln x}{x}$ .

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de $f$ en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ .
   c. Démontrer que la droite $\Delta$ d'équation $y=-x+1$ est asymptote à la courbe C.
   d. Étudier la position relative de C et $\Delta$ sur $]0 ; +\infty[$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$ . Vérifier que pour tout $x$ de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ .
   c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de $f$ sur $]0 ; +\infty[$.
   d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f$ sur $]0 ; +\infty[$.

3. Dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite $\Delta$ et la courbe $C$.

***Partie C***

1. Vérifier que la fonction $F$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de $f$.
2. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x$ =1 et $x = e$.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire en $cm^2$,de la partie E, puis en donner la valeur arrondie au $mm^2$ près.

***Partie D***

1. Résoudre l'équation $f'(x)=-1$
   En déduire l'existence d'une unique tangente T à C parallèle à $\Delta$, préciser les coordonnées du point de contact $J$ et l'équation de cette tangente T . Tracer T dans le repère précédent.
2. Soit $x$ un réel supérieur ou égal à 1. $M$ et $N$ sont les points d'abscisse $x$ situés respectivement sur C et sur $\Delta$.
   a. Préciser, en fonction de $x$, la valeur de la distance $MN$.
   b. Etudier sur $[1 ; +\infty[$ les variations de la fonction $h$ définie sur $[1 ; +\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\ln x}{x}$.
   c. Déduire des questions précédentes que la distance $MN$ est maximale lorsque $M$ est en $J$ et préciser la valeur de cette distance maximale.

## Problème10

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x + \ln x$ ( où ln désigne le logarithme népérien).

1. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $g(x) > 0$.

**<u>Partie II</u>**

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$.

On appelle G la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unités : 2cm).

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la partie **I** pour établir le tableau de variation de *f*.
3. Calculer $f(e^{3/2})$. On fera apparaître le détail des calculs.
4. Soit A le point d'abscisse 1 de G. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe G.
5. Tracer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la tangente (T) ainsi que la partie de la courbe G relative à l'intervalle ]0;6].
6. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$.

a. Montrer que F est une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$.

b. Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine limité dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ par la courbe G, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près.