PROBLÈME 26

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On s'intéresse dans ce problème à une fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$.On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan P. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+\ln x$. On désigne par *g*' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer *g*'(*x*) pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calculer g(1) et en déduire l'étude du signe de g(*x*) pour *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles *a* et *b* telles que, pour tout nombre réel *x* appartenant à $]0;+\infty[$, $f(x)=ax+b-\dfrac{\ln x}{x}$

1. on désigne par *f* ' la fonction dérivée de la fonction *f*.
   Calculer *f* '(*x*) pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Sachant que la courbe C_f passe par le point de coordonnées (1; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres *a* et *b*.

Partie C : Etude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

1. a. Déterminer la limite de la fonction *f* en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
   b. Etablir le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. En déduire le signe de *f*(*x*) pour *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. On considère la droite D d'équation $y=x-1$.
   a. Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C_f .
   b. Etudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite D.

c. Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation *x* = 1 et *x* = *e*.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $H(x)=(\ln x)^2$.
   On désigne par H ' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer H'(*x*) pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. Calculer A. Donner la valeur de A , arrondie au mm².

PROBLÈME 27

Sur la feuille annexe, qui doit être remise avec la copie, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative C_f d'une fonction *f* définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

Partie A : détermination de la fonction f

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3;-\dfrac{7}{2}+3\ln 2\right)$.

La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe C_f. On note f' la fonction dérivée de *f*.

1. Quelle est la valeur exacte de $f(3)$?
2. Donner sans justification la limite de la fonction *f* en 2.
3. On suppose que, pour tout réel *x* de l'intervalle $]2;+\infty[$, $f(x) = ax - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$

   En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre *a*.

Partie B : étude de la fonction f

On admet que la fonction *f* est définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$$

1. a. Retrouver par le calcul la limite de la fonction *f* en 2.

   b. Montrer que, pour tout *x* réel de l'intervalle $]2;+\infty[$ $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

   c. En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$ .Tracer Δ sur la feuille annexe.

3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel *x* de l'intervalle $]2;+\infty[$ $f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}$

   b. étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2{,}1;3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9;10]$.

   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β.

<u>Partie C : calcul d'aire</u>

On considère les fonctions *h* et *H* définies sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ et

$H(x) = (x-1)\ln(x-1) - (x-1)\ln(x-2)$.

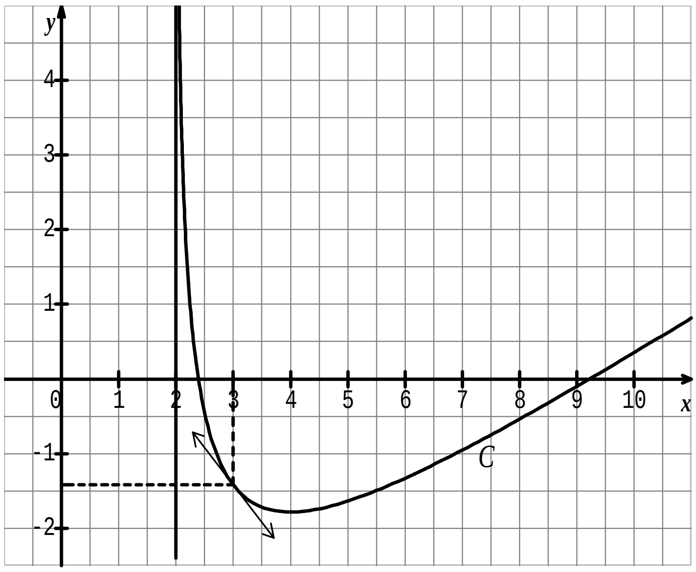
a-Montrer que la fonction *H* est une primitive de la fonction *h* sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

b. En déduire une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

2. On considère le domaine *D* du plan compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 9$.Hachurer le domaine *D* sur le graphique de la feuille annexe.

  b. On note *A* la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine *D*. Exprimer *A* sous la forme d'une intégrale.

  c. Calculer la valeur exacte de *A*, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.



PROBLÈME 28

Partie A **-**1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation : $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

b. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, de l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B *:* Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$. Soit C la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier la limite de *f* en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

   b. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$ (on pourra factoriser par ln *x*).

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   Vérifier que, pour tout nombre réel *x* de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{4\ln x-5}{x}$.

   b. Etudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   c. En déduire le signe de *f*(*x*) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.On pourra remarquer que la fonction *f* s'annule en $\sqrt{e}$ et en e^2.

3. Donner une équation de la tangente T et la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

4. Tracer la courbe C et la tangente T dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

5. a. Hachurer le domaine A du plan situé en dessous de l'axe (O*x*) et compris entre la courbe C et l'axe (O*x*).

   b. Vérifier que la fonction *F* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x(2(\ln x)^2-9\ln x+11)$ est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PROBLÈME 29

A) Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-\ln x-1$

1) Calculer les limites aux bornes de g en 0 et en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$

3) Etudier les variations de g et dresser don tableau de variation

4)a)Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions sur $]0;+\infty[$

On désigne par α la plus petite des deux solutions.

b) Démontrer que 0,4 < α <0,5

c) Calculer $g'(1)$

d) En déduire que pour tout nombre réel x strictement positif :

$si\, x\in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[$ alors $g(x)>0$ $si\, x\in]\alpha;1[$ alors $g(x)>0$

B) Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. (O,I,J).

Unité graphique : 4cm sur (OI) et 2cm 0,5 sur (OJ)

1)a)Déterminer la limite de f en 0.Donner une interprétation graphique du résultat

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

3)a)Démontrer que $f(\alpha)=2\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$

4) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à (C_f)

5) Etudier la position relative de(Δ) par rapport (C_f)

6) Tracer (Δ) et (C_f) .On prendra et $\alpha=0,45$ et $f(\alpha)=3,1$

7) Soit (A) l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_f), (Δ)et les droites d'équations respectives $x=e^2$ et $x=1$ .Calculer (A)

PROBLÈME 30

Soit f est la fonction définie, sur [0 ;e[$\cup$]e ;+ ∞ [, par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{\ln x - 1} \; pourx \in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0) = 2 \end{cases}$.

1)a)Montrer que f est continue en 0 puis

b) Calculer $\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = 2$

2) Etudier le signe de $\left(\ln x - 1\right)$ et en déduire les limites à gauche et à droite de f en e .

3) Etudier la dérivabilité de f en o et dresser son tableau de variation

4) Résoudre dans **R** l'équation : $f\left(x\right) = 0$.

5) Représenter f dans un repère orthogonal. On précisera la position relative de la courbe représentative de f et de la droite Δ d'équation y = 2 .

6) justifier que e^{-1} est un point d'inflexion de C_f