## Problème 16

### *Partie A*

soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x-1-\frac{9}{2}x^2$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$ , $g'(x)=\frac{1}{x}-9x=\frac{1-9x^2}{x}=\frac{(1-3x)(1+3x)}{x}$. Or $x$ >0 donc $g'(x)=0$

Si et seulement si, $1-3x=0$ ou $1+3x=0$ c'est-à-dire $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-\frac{1}{3}$, mais $-\frac{1}{3}\notin]0;+\infty[$

Donc $g'(x)>0$ sur $\left]0;\frac{1}{3}\right[$ et $g'(x)<0$ sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

| $x$ | 0 | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $g(x)$ | | ↗ | $-\ln 3-\frac{3}{2}$ | ↘ | |

3- la fonction g admet un maximum sur $]0;+\infty[$ ,

égal à $-\ln 3-\frac{3}{2}<0$, donc pour tout réel appartenant à $]0;+\infty[$,

$g(x)$ est strictement négatif.

### *Partie B*

soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}-9x+5=5$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}-2\frac{\ln x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

La droite D d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-9x+5=-\infty$ , donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=-9-2\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=-9-\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{-9x^2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{2g(x)}{x^2}$.

Or $x^2>0$, donc $f'(x)$ est strictement négatif sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | − | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

2/a)soit D la droite d'équation $y=-9x+5$. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-(-9x+5)$.

pour tout $x\in]0;+\infty[$ ; $h(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}-(-9x+5)=-2\frac{\ln x}{x}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ .la droite D est donc asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b) pour le point d'intersection de C et D , on a $h(x)=0$, c'est-à-dire $\ln x=0$, soit $x=1$, les coordonnées de ce point sont $(1;-4)$.

c) si $x=1$ , on vient de voir que C et D se coupent ;

si $x>1$ on a : $\ln x>0$ et donc $h(x)<0$, d'où la courbe C est en dessous de la droite D

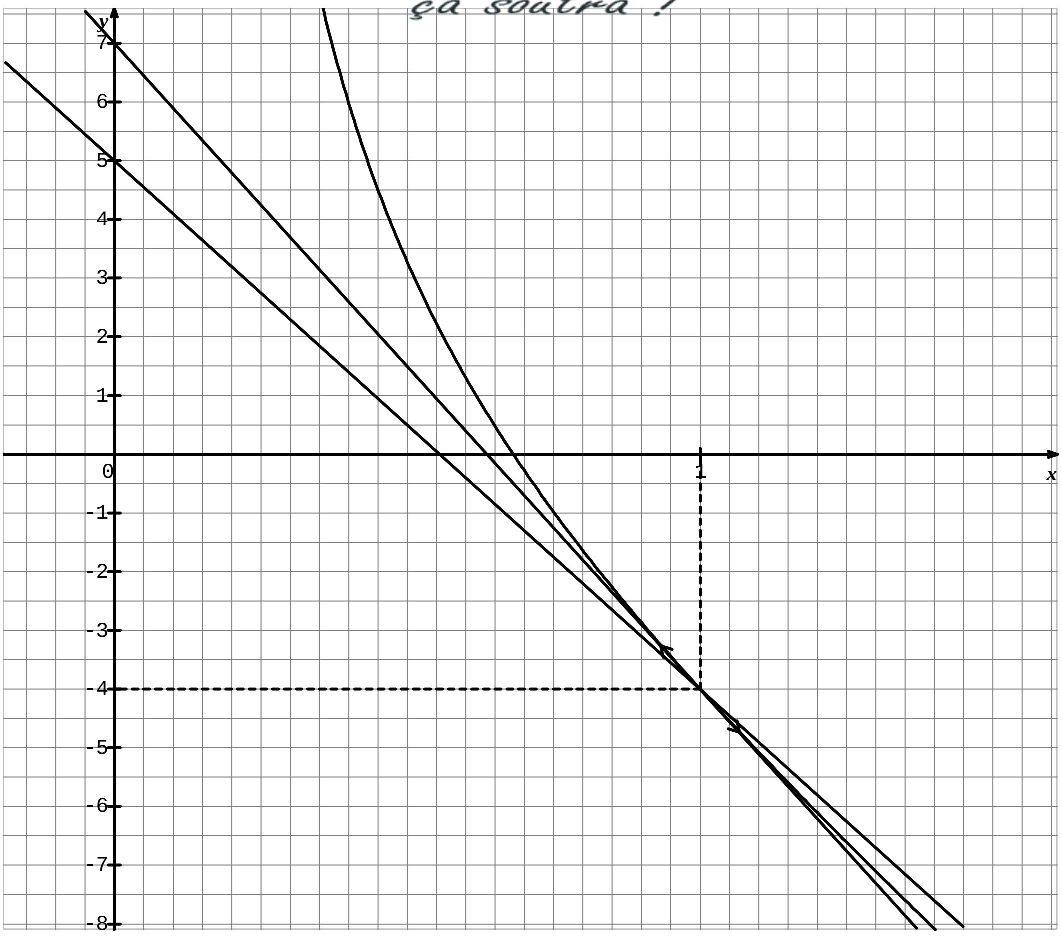
si $0<x<1$, on a : $\ln x<0$ et donc $h(x)>0$, d'où la courbe C est au dessus de la droite D.

3°-

Tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ; $f'(1)=-11$ et $f(1)=-4$, donc $y=-11(x-1)-4$, soit $y=-11x+7$

b)courbes




4) la fonction $f$ est dérivable est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc en particulier sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, de plus $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+4\ln 2>0$ et $f(1)=-4<0$ ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe un seul réel $\alpha$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

Encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.on a $f(0,6)>0$ et $f(0,7)<0$, donc $0,6<\alpha<0,7$

Puis $f(0,68)>0$ et $f(0,69)<0$ donc $0,68<\alpha<0,69$.

## Problème : 17

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+\ln x$

1. $g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$, pour $x\in]0;+\infty[$ ; $2x^2+1>0$ et $\frac{1}{x}>0$ , donc $g'(x)>0$ . on en déduit que la fonction g est croissante ( strictement ) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $g(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

2. $g(1)=1^2-1+\ln 1=0$

en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et g(1) = 0 on en déduit le signe de g($x$) pour $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Partie B

1. $f'(x)=a-\frac{1-\ln x}{x^2}$

2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, $f(1)=0$

et $f'(1) = 0$ soit : $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b - \frac{\ln 1}{1} = a + b = 0$ ; $f'(1) = a - \frac{1-\ln 1}{1^2} = a - 1 = 0$

Donc $a = 1$ et $b = -1$ et enfin $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

Partie C : Etude de la fonction ***f*.**

1. a. $\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1$ ; $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln x \times \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = -\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

b. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ et on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2. a. $f'(x) = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b. $f'(x)$ est du signe de g($x$) sur $]0 ; +\infty[$ , on en déduit les variations de $f$ :

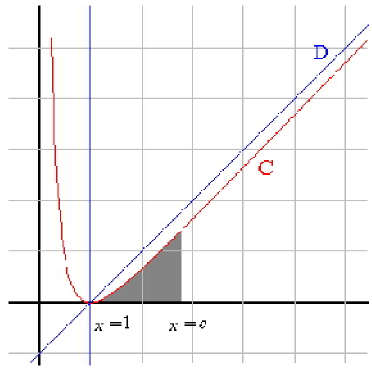
| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 0 | ↗ $+\infty$ |

c. 0 est le minimum absolue de la fonction $f$ sur son ensemble de définition on $f(x) \geq 0$ pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ .

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a. $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - (x-1)] = -\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.




b. Etudions le signe de $f(x) - (x-1)$ d'après a. il est du signe de $-\ln x$ soit :

$-\ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 0$ ou encore $\ln x < \ln 1$ soit $x < 1$ :

si $x < 1$ alors $f(x) - (x-1) > 0$ donc sur l'intervalle $]0 ; 1[$ , la courbe C est au dessus de l'asymptote D.

si $x > 1$ alors $f(x) - (x-1) < 0$ donc sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ , la courbe C est au dessous de l'asymptote D.

Si $x = 1$, la courbe C et la droite D se coupent en un point de coordonnées $(1; 0)$

c.

Partie D : Calcul d'aire

1. a. $H(x) = (\ln x)^2$ : $H = u^2$ avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$ , $H' = 2u'u$ et on a :

$$H'(x) = \frac{2\ln x}{x}$$

b. une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

2. a. b.

$$S = \int_1^e f(x)dx = [F(x)]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\right] = \left(\frac{e^2}{2} - e\right)u.a$$

$$1u.a = 4cm^2 \Rightarrow A = 4\left(\frac{e^2}{2} - e\right) = (2e^2 - 4e)cm^2 .$$

## Problème 18

*Partie A* $f(x)=x^2+ax+b-2\ln x$

Déterminons les valeurs de $a$ et de $b$ tels que la courbe C d'équation $y=f(x)$ passe par $A(1;-3)$ et que la tangente à C en $A$ soit parallèle à l'axe $Ox$.

On doit avoir : $f(1)=-3$ et $f'(1)=0$ . Or $f'(x)=2x+a-\dfrac{2}{x}$

On en déduit : $f(1)=1+a+b-2\ln 1=a+b-1=-3$ donc : $a+b=-4$ $f'(1)=2+a-\dfrac{2}{1}=a=0$

donc : $a=0$ et $b=-4$. La fonction $f$ cherchée est donc définie par : $f(x)=x^2-4-2\ln x$.

Partie B

1.a) On a clairement : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-4\right)=-4$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

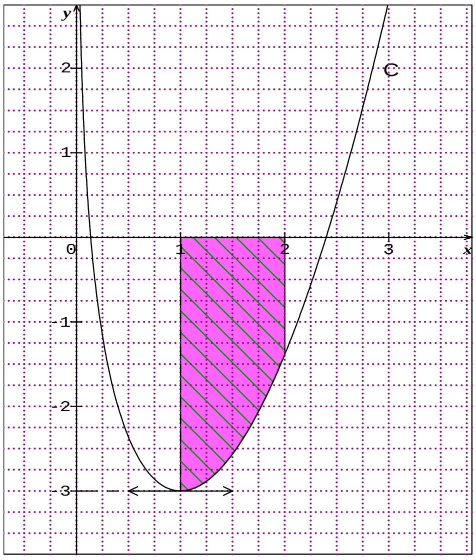
On en déduit que la droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0 (l'axe O$y$ est asymptote à C ).

2.a)Vérifier pour $x>0$ : $f(x)=x\left(x-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right)$. C'est évident !

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x}-2\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$.Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.




3. On peut écrire : $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

Signe de f '(x). Tableau de variation de f.

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | $+\infty$ ↘ | -3 | ↗ $+\infty$ |

4.Signe de $f(x)$ lorsque $x\in[1;2]$.

On sait que $f(1)=-3$. Par ailleurs $f(2)=2^2-4-2\ln 2=-2\ln 2$.

Donc $f(2)<0$.La fonction $f$ étant dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$ on en déduit qu'elle est strictement négative sur cet intervalle.

5.Courbe C.

***Partie C.*** Calcul de $H'(x)$. On a : $H(x)=x\ln x-x$. Donc : $H'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$

En déduire une primitive de $f$ sur $I$. Une primitive de $f$ sur $I$ est définie par :

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x-2(x\ln x-x)$ ou encore : $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x-2x\ln x$

Calcul de l'aire de $\Delta$. La fonction $f$ étant négative sur l'intervalle $[1;2]$,

L'unité d'aire vaut 4 cm$^2$ Donc on peut écrire que cette aire est donnée

par : $Aire(\Delta)=4\times\left(-\int_1^2 f(x)dx\right)=4\times\left[-F(x)\right]_1^2=4\times\left[F(1)-F(2)\right]$ Donc : $F(1)=\dfrac{1}{3}-2-2\ln 1=-\dfrac{5}{3}$ et

$F(2)=\dfrac{8}{3}-4-4\ln 2$ , donc $Aire(\Delta)=4\times\left[F(1)-F(2)\right]=4\times\left(-\dfrac{5}{3}-\dfrac{8}{3}+4+4\ln 2\right)=4\left(4\ln 2-\dfrac{1}{3}\right)$

$Aire(\Delta)=16\ln 2-\dfrac{4}{3}\approx 9{,}75cm^2$.

## Problème 19

Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-8\ln x+8$

1.a la fonction $g$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$g(x)=2x-\frac{8}{x}=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x^2-4)}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}.$$

b. pour tout $x\in]0;+\infty[$, $x>0$ et $x+2>0$, donc le signe de $g'(x)$ dépend uniquement de $x-2$.

On déduit que $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$ et $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ sur l'intervalle $]0;2[$.

D'où le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | ↘ | $g(2)$ | ↗ |

2. $g(2)=2^2-8\ln 2+8=4-8\ln 2+8=12-8\ln 2\approx 6,45$

à $10^{-2}$ près. La fonction $g$ admet un minimum égal à $g(2)>0$. Donc $g(x)>0$.

Partie B

1. Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+8\ln x}{x}$.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+8\ln x}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{8\ln x}{x}=x-3+8\frac{\ln x}{x}.$$

2.a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-3)=-3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=8\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=8\times 0=0$ ( vu formulaire ),

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b. vu que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-\infty$, on déduit que la droite $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe $C$ au voisinage de 0 .

3.a. la fonction $f$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $f'(x)=\dfrac{\left(2x-3+\dfrac{8}{x}\right)\times x-(x^2-3x+8\ln x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{2x^2-3x+8-x^2+3x-8\ln x}{x^2}=\frac{x^2+8-8\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b. $x^2>0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après la partie A , $g(x)>0$, donc $f'(x)>0$ sur $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

c.

4. Soit $D$ la droite $y=x-3$.

a. soit $d(x)=f(x)-y=x-3+\dfrac{8\ln x}{x}-(x-3)=\dfrac{8\ln x}{x}$.or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=8\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=8\times 0=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$. On déduit que la droite D d'équation $y=x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $C$ au voisinage de $+\infty$.

b. Soit A le point d'intersection de $C$ et la droite D : $A\in C\cap C\Leftrightarrow f(x)=y$

donc $x-3+8\dfrac{\ln x}{x}=x-3\Leftrightarrow 8\dfrac{\ln x}{x}=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$ et $A\in D\Leftrightarrow y=x_A-3=1-3=-2$.

Donc le point A a pour coordonnées $(1;-2)$.

c. la position relative de $C$ et D dépend du signe de $d(x)=f(x)-y=\dfrac{8\ln x}{x}$, or $x>0$,

or $\ln x<0$ sur $]0;1[$ et $\ln x>0$ sur $]1;+\infty[$. On déduit que :

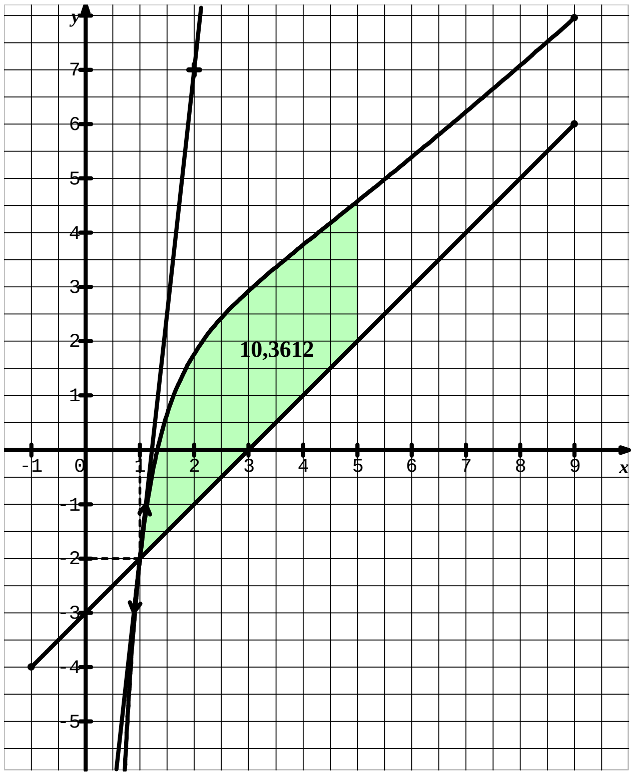
Sur $]0;1[$ : $\dfrac{8\ln x}{x}<0$, donc la courbe $C$ est en dessous de la droite D ( $d(x)=f(x)-y<0$ ).

sur $]1;+\infty[$ : $\dfrac{8\ln x}{x}>0$, donc la courbe $C$ est au dessus de la droite D. ( $d(x)=f(x)-y>0$ ).

d. l'équation de la tangente à $C$ au point d'abscisse 1 est définie par $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

or $f'(1)=\dfrac{1^2+8-8\ln 1}{1^2}=9$ et $f(1)=\dfrac{1^2-3+8\ln 1}{1}=-2$, donc $y=9(x-1)-2=9x-11$

5. courbe




Partie C

1. Soit $h$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a. sur $]0;+\infty[$ , $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$, $H(x)=\dfrac{1}{2}u^2$ ,

$H'=\dfrac{1}{2}2u'u$ avec $u=\ln x$ et $u=\dfrac{1}{x}$. Donc

$H'(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x=\dfrac{\ln x}{x}$ et par conséquent $H(x)$ est une primitive de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

b. sur $]0;+\infty[$ , on a : $f(x)=x-3+\dfrac{8\ln x}{x}$ , donc d'après la question précédente on obtient : $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-3x+8\times\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

2. a voir graphique ci-dessus

b. sur l'intervalle $[1;5]$, la courbe $C$ est au dessus de la droite D , donc $d(x)=f(x)-y>0$

donc l'aire de la partie du plan hachurée est $A=\left(\int_1^5(f(x)-y)dx\right)\times u.a$

$$A=\left(\int_1^5 8h(x)dx\right)\times u.a=8\left(\int_1^5 h(x)dx\right)u.a=8[H(x)]_1^5\times u.a=8\times\frac{1}{2}\left((\ln 5)^2-(\ln 1)^2\right)u.a=4(\ln 5)^2\,u.a\,.$$

Or $1\,u.a=1\,cm^2$. Donc $A=4(\ln 5)^2\,cm^2\approx 10,36cm^2$

## Problème 20

Partie A .

1. $g(x)=x^2-2\ln(x)+4$ . $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=2\dfrac{x^2-1}{x}=2\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$

2. sur l'intervalle I $g'(x)=0\Leftrightarrow 2\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$, puisque $2\dfrac{(x+1)}{x}>0$ sur l'intervalle I.

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | 3 | $\nearrow$ | |

3. la fonction g admet un minimum strictement positive égal à 3 atteint en $x=1$, par conséquent $g(x)>0$ .

Partie B

1.a. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(x)-1}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(x)-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x)-1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)=1/2$ ; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x)-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)-1)\times\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

1.b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ (*voir formulaire*), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2.a&b. $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{(1/x)\times x - 1\times(\ln x - 1)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+4-2\ln(x)}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

On sait que $g(x) > 0$ sur l'intervalle I , par conséquent $f'(x) > 0$ sur l'intervalle I et la fonction $f$ est strictement croissante sur cet intervalle .

c. $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ln(1)-1}{1} = 1 - 1 = 0$ , donc $f(x) < 0$ sur $]0;1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$

3. voir graphique

***Partie C***

1. $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}[\ln(x)-1]^2$ . $F(x) = \frac{2}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 2\frac{1}{x}(\ln x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{(\ln(x)-1)}{x} = f(x)$

Et on déduit que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle I.

2. voir graphique.

3. $A = 4\left[F(e) - F(1)\right]$ représente l'aire de la partie hachurée sur l'intervalle $[1;e]$.