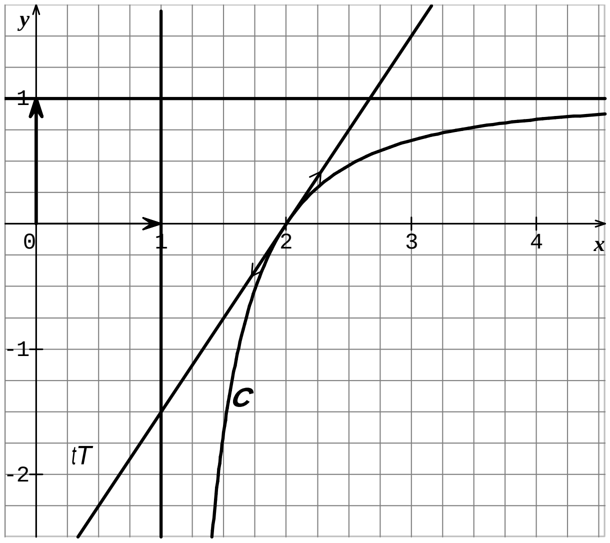
.
Problème 16

Partie A



On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique (C) d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2;0)$ et $(0;-3)$. La droite (D) a pour équation $y=1$.

1.a. Déterminer graphiquement $g(2)$.

b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.

c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe (C). Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Sachant que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point. Etudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1, g_2, g_3 sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$g_1(x)=1-\frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x)=1-\frac{2}{x^2-x} \quad \text{et} \quad g_3(x)=\ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer $g_1(2)$, $g_2(2)$, $g_3(2)$. Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$. Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g'_1 et g'_2 les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2. Calculer $g'_1(2)$, $g'_2(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$.

On note (C_f). la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

1.a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, $f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$?

b. Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f).?

2.a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifiez que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f).

c. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$, $\frac{x}{x-1}>1$. Quel est alors le signe de $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$?

d. En déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ).

3.a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction trouvée dans la partie A.

b. à l'aide des résultats graphiques obtenus dans la partie A, dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie C

1°/Montrer que, sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la fonction H définie par :$H(x) = x\ln x-(x-1)\ln(x-1)$ est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2.a. Construire la courbe (C_f), la droite (Δ) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (Δ), la courbe (C_f) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

b. On désigne par A la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de A puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

PROBLEME 17

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I =] 0; $+\infty$ [par : $g(x)=\ln x-1-\frac{9}{2}x^2$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. Etudier son signe sur] 0; + ∞ [.
2. Etudier le sens de variation de la fonction *g* (on ne demande pas les limites en 0 et en +∞).
3. En déduire pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ le signe de *g*(*x*).

Partie B

On se propose d'étudier la fonction *f* définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x) = -9x + 5 - \dfrac{2\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction *f* lorsque *x* tend vers +∞).

4.soit (Δ) la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction *h* définie sur]0 ; +∞[par $h(x) = f(x) - (-9x + 5)$.

a. Démontrer que (Δ)est asymptote à la courbe C.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ

c. Etudier la position relative de C et Δ sur]0 ; +∞[

5. *a*. Calculer *f* '(*x*) pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. *f* ' est la fonction dérivée de la fonction *f*

b. Vérifier que pour tout *x* de]0 ; +∞[: $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

c. Déduire de la partie A le sens de variation de *f* sur]0 ; +∞[.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.
7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
8. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie C :

Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $h(x) = (\ln x)^2$

1.On désigne par *h*' la fonction dérivée de la fonction *h* .
Calculer *h*'(*x*) pour tout réel *x* de l'intervalle] 0 ; +∞ [.

2. En déduire une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle] 0 ; +∞ [.
3. Hachurer sur le graphique la partie *E* du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1) : x = 1 \quad et \quad (d_2) : x = e$.
4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².. Donner la valeur exacte .

Problème 18

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On s'intéresse dans ce problème à une fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan P.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

On désigne par *g*' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer *g*'(*x*) pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calculer g(1) et en déduire l'étude du signe de g(*x*) pour *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles *a* et *b* telles que, pour tout nombre réel *x* appartenant à $]0;+\infty[$,

$f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$. on désigne par *f* ' la fonction dérivée de la fonction *f*.

1.Calculer *f* '(*x*) pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Sachant que la courbe C_f passe par le point de coordonnées (1; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres *a* et *b*.

Partie C : Etude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
   b. Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. On considère la droite D d'équation $y=x-1$.
   a. Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C_f.
   b. Etudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite D.
   c. Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $H(x)=(\ln x)^2$.
   On désigne par H ' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer H'(x) pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. Calculer A. Donner la valeur de A , arrondie au mm².

Problème 19

Partie A . Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, par : $f(x)=x^2+ax+b-2\ln x$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées (1 ; –3).

Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe C_f passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, par : $f(x)=x^2-4-2\ln x$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, on a $f(x)=x\left(x-\frac{4}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)$.
   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .Vérifier que $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.
4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1;2]$.
6. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par : $H(x)=x\ln x-x$.

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H. En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
2. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
   Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm².

PROBLÈME 20

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-8\ln x+8$.

1. a. Calculer $g'(x)$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de g (l'étude des limites de g n'est pas demandée).

2. Donner une valeur approchée de $g(2)$ à 10^{-2} près, en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

<u>Partie B : étude et représentation graphique d'une fonction</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 1 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+8\ln x}{x}$ et C sa représentation graphique dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$ on a : $f(x)=x-3+\dfrac{8\ln x}{x}$.

2. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de $f(x)$.

b. En déduire l'existence d'une asymptote a la courbe C, et en donner une équation.

3. a. Déterminer la dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$.

b. Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

4. Soit D la droite d'équation $y = x - 3$.

a. Montrer que D est asymptote à C en $+\infty$.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de C et de D.

c. Étudier la position relative de C et de D.

5. Tracer dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la courbe C et la droite D.

<u>Partie C : calcul d'une aire</u>

1. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a. Vérifier qu'une primitive de h sur $]0;+\infty[$ est la fonction H définie par $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

b. En déduire une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. a. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C et la droite D, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan hachurée ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée a 10^{-2} près.