PROBLEME 9

Soit f est la fonction définie, sur $\left]0;e\right[\cup\left]e;+\infty\right[$, par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{\ln x-1}, \forall x\in\left]0;e\right[\cup\left]e;+\infty\right[\\ f(0)=2 \end{cases}$

1)a)Montrer que f est continue en 0 puis

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

2) Etudier le signe de $(\ln x-1)$ et en déduire les limites à gauche et à droite de f en e .

3) Etudier la dérivabilité de f en o et dresser son tableau de variation

4) Résoudre dans **R** l'équation : $f(x)=0$.

5) Représenter f dans un repère orthogonal. On précisera la position relative de la courbe représentative de f et de la droite Δ d'équation y = 2.

6) justifier que e^{-1} est un point d'inflexion de C_f

PROBLEME 10

On considère la fonction f de R vers R définie par : $f(x)=\dfrac{x+\ln|1-x|}{1-x}$

1-Etudier le sens de variations de la fonction f .

2-On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

3-Démontrer que (C_f)admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnes

4-Construire(C_f)

PROBLEME 11

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\dfrac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette figure sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y=\dfrac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

c. Étudier les positions relatives de (D) et de (C).

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)-\dfrac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que pour tout x réel,

$f'(x)=\dfrac{e^{x}-2}{3\left(e^{x}+1\right)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{3}x$ et les droites d'équations x = 0 et x = n.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n=\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)dx$.

2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1+e^{-x}\right)\leq e^{-x}$. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$. La suite (d_n) est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

PROBLEME 12

Le but de ce problème est d'étudier, dans un premier temps (partie A), la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ pour $x>0$ et $f(x)=\frac{1}{2}$, puis (partie B) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x)=x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 cm. On désigne par C la représentation graphique de f.

I -Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

a**)** Étudier le sens de variation de g.
b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) En déduire le signe de g(x) pour tout x de $]0;+\infty[$

2. Montrer que, pour tout x de [2 ; 3], on a $g(x)=\frac{1}{2}$.

II -1. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$(on pourra poser $x=\frac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en 0.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.
3. Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que f ´(x) = g(x)).

4. a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=1$

).
b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite$(\Delta): y = \frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de$+\infty$.

5. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite(Δ), la courbe (C_f) et la droite D d'équation $y = x$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle [2 ; 3].

I 1. Soit la fonction h définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que, pour tout x de I, $h'(x) < 0$.

On remarquera que$h'(x) = g(x) - x$.

En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution dans I ;
on note α cette solution.

II 1. Montrer que, pour tout x de I, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

2. En déduire que, pour tout x de I, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

III On définit la suite $(u_n)_{n\in N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout n de N, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que, pour tout n de N, u_n appartient à I.

1. Établir les inégalités suivantes :

(1) pour tout n de N, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. (2) pour tout n de N, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

3. Déterminer n_0 entier naturel tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

En déduire alors une approximation de α à 10^{-3} près.