Problème 22

A.1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

$f(1)=1$; $f'(1)=1$ puisque le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal à 1

$f'(2)=0$, puisque la tangente au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses

2. $f(x)=a\ln x+bx+\dfrac{c}{x}$; $f'(x)=\dfrac{a}{x}+b-\dfrac{c}{x^2}$.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c

$f(1)=a\ln 1+b\times 1+\dfrac{c}{1}=b+c$; $f'(1)=\dfrac{a}{1}+b-\dfrac{c}{1^2}=a+b-c$. $f'(2)=\dfrac{a}{2}+b-\dfrac{c}{2^2}=\dfrac{a}{2}+b-\dfrac{c}{4}=\dfrac{2a+4b-c}{4}$.

4. $f(1)=1\Leftrightarrow b+c=1$; $f'(1)=1\Leftrightarrow a+b-c=1$ $f'(2)=0\Leftrightarrow \dfrac{2a+4b-c}{4}=0\Leftrightarrow 2a+4b-c=0$ et on obtient

le système $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$. $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \quad \times 2 \\ 2a+5b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=2-2b=2-2(-3)=2+6=8 \\ c=1-b=1-(-3)=1+3=4 \end{cases}$.

5. $f(x)=8\ln x-3x+\dfrac{4}{x}$

B. 1. $f(x)=x\left(8\dfrac{\ln x}{x}-3+\dfrac{4}{x^2}\right)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8\dfrac{\ln x}{x}-3+\dfrac{4}{x^2}\right)=-3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -3x^2=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(8x\ln x-3x^2+4\right)=4$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$.

3. a. $f'(x)=\dfrac{8}{x}-3-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{8x-3x^2-4}{x^2}$, or $(3x-2)(2-x)=6x-3x^2-4+2x=-3x^2+8x-4$,donc $f'(x)=\dfrac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

x	0		2/3		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0,76	↗	1,54	↘	$-\infty$

b. La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, elle est aussi strictement décroissante sur l'intervalle $[4;5]\subset[2;+\infty[$, or $f(4)\approx 0,09$ et $f(5)\approx -1,324$ de plus $0\in[f(4);f(5)]$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha)=0$ et $\alpha\in[4;5]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a : $f(4,07)=0,0019$ et $f(4,08)\approx -0,01$, donc $4,07<\alpha<4,08$.

C.1. $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\dfrac{3}{2}x^2$: $F'(x)=8\ln x+\dfrac{(8x+4)}{x}-8-3x=8\ln x+8+\dfrac{4}{x}-8-3x=8\ln x-3x+\dfrac{4}{x}=f(x)$

,par conséquent $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. $A=\left(\displaystyle\int_1^3 f(x)dx\right)u.a=4\times\left[F(x)\right]_1^3=4\left[F(3)-F(1)\right]$

$F(3)=(8\times 3+4)\ln 3-8\times 3-\dfrac{3}{2}\times 9=28\ln 3-\dfrac{75}{2}$ et $F(3)=(8\times 1+4)\ln 1-8-\dfrac{3}{2}=0-\dfrac{19}{2}$

$A=4\left[28\ln 3-\dfrac{75}{2}+\dfrac{19}{2}\right]=4\left[28\ln 3-\dfrac{56}{2}\right]=4\left(28\ln 3-28\right)cm^2\approx 11,05cm^2$

Problème 23

Partie A

1. $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3x-4\right)=-4$; $\lim\limits_{x\to 0} 4\ln x=4\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x-4\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4\ln x=4\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

2. Soit g' la dérivée de g. $g'(x)=2x+3+\dfrac{4}{x}=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$

3. g'(x) est du signe de $2x^2+3x+4$, calculons les racines de ce polynôme :

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times2\times4=9-32=-23<0$, donc $2x^2+3x+4$ n'a pas racine et reste toujours strictement positif, (prendre le signe de $a=2$) par conséquent g'(x) > 0 sur]0 ; +∞[, il en résulte que g est croissante sur]0 ; +∞[

4. g(1) = 1 + 3 - 4 + 4 ln 1 = 0 donc g(x) < 0 sur]0 ; 1[et
g(x) > 0 sur]1;+∞[.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

Partie B

1. a. limite de f en + ∞.

$f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}3\ln x=3\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4\dfrac{\ln x}{x}=4\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b. la limite de f en 0 ; $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$: $x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}=f(x)$

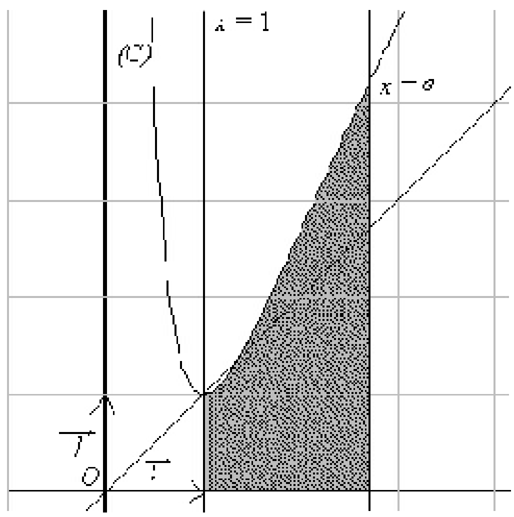
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-4}{x}=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(3-\dfrac{4}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x=+\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to0}x=0$

On peut en déduire que la droite d'équation x = 0 est asymptote à (C)

2. a. Pour tout x strictement positif : $f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$

$$f'(x)=1+\frac{3}{x}-4\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=1+\frac{3}{x}-4\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+3x-4(1-\ln x)}{x^2}=\frac{x^2+3x-4+4\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$



b. f '(x) est du signe de g(x) dont le signe a été trouvé Partie A 4.

c. $f(1)=1+3\ln1-4\dfrac{\ln1}{1}=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x\Leftrightarrow x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x=x\Leftrightarrow\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x=0$

$3-\dfrac{4}{x}=0$ et $\ln x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ *ou* $x=1$, donc $S=\left\{1;\dfrac{4}{3}\right\}$.

4. voir graphique

5. La droite d'équation $y = x$ coupe la courbe (C) en deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4 / 3 ; 4 / 3)

Partie C

1. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$; $F'(x)=x-3+3\ln x+3-2\times 2\frac{\ln x^2}{x}$ et on a :

$F'(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}=f(x)$. donc F est une primitive de *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. a.

b. $\int_1^e f(x)dx=[F(x)]_1^e=F(e)-F(1)=\frac{e^2}{2}-3e+3e\ln e-2(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-3\right)=\left(\frac{e^2}{2}-2+\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)$

$1u.a=3^2=9cm^2$, donc $A=9\times\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)=\frac{9}{2}\left(e^2+1\right)cm^2\approx 37,75cm^2$

Problème 24

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

1) $g'(x)=2x+\frac{2}{x}=\frac{2x^2+2}{x}$

2) $g'(x)>0$ comme somme de deux expressions strictement positive sur]0; + ∞[donc g est strictement croissante sur] $]0;+\infty[$.

3) Résolution de l'équation g(*x*) = 0.

a) $g(1)=1-4+2\ln 1=-3<0$ et $g(2)=2^2-4+2\ln 2=2\ln n2>0$. g est strictement croissante sur [1; 2] , g est dérivable sur $[1;2]$ et g(1) < 0 < g(2) , donc l'équation g(*x*) = 0 possède une solution unique α sur l'intervalle $[1;2]$.

b) g(1,70) < 0 < g(1,71) donc 1,70 < α < 1,71

4) On en déduit que g(*x*) < 0 sur]0 ; α [et g(*x*) > 0 sur] α ; + ∞[et g(α) = 0

II) Etude de la fonction *f*

1) La droite d'équation *x* = 0 est asymptote à la courbe C

$\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$; $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=+\infty$ $\lim_{x\to 0}-2\ln x=-2\lim_{x\to 0}\ln x=+\infty$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$,

$\lim_{x\to 0}\frac{-2\ln x}{x}=-2\lim_{x\to 0}\ln x\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$, et on a finalement $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$

2) a) Déterminer la limite de *f* en + ∞. $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b) $h(x)=f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$

c) $f(x)=x-1\Leftrightarrow\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$. donc l'abscisse du point d'intersection de C et D est *e* et son ordonnée est $e-1$ (en remplaçant *x* = *e* dans l'équation de D , on trouve $y=e-1$)

d) $h(x)=f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2(1-\ln x)}{x}$, $f(x)-(x-1)$ est du signe de $1-\ln x$,

$1-\ln x>0$ si et seulement si $\ln x<1$ soit $x<e$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0;e]$, la courbe C est au dessus de la droite D .

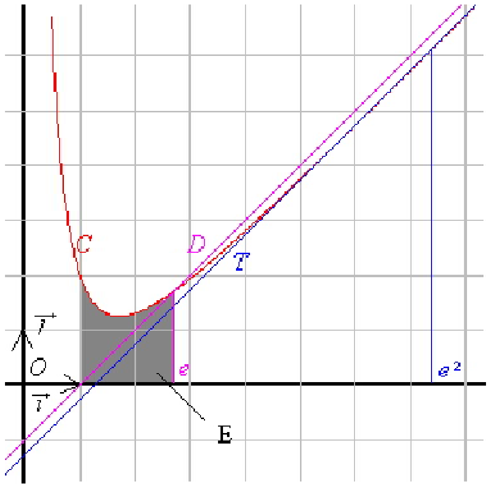
sur l'intervalle [*e* ; + ∞[la courbe C est en dessous de la droite D

3) Etude des variations de *f*.

a) $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}-2\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=1-\frac{2}{x^2}-2\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-4+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

b) $f'(x)$ est donc du signe de g(x) , on en déduit les variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$



4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2.

$$f'(e^2)=\frac{e^4-4+2\ln e^2}{e^4}=\frac{e^4-4+4\ln e}{e^4}=1$$

le coefficient directeur de la tangente T est le même que le coefficient directeur de la droite D soit 1.

5)

III) Calcul d'une aire

1) $H(x)=\frac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2$: $H'(x)=x-1+\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}$

donc H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0;+ ∞[.

2)

a) voir figure

b) $S=\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2\right]_1^e=\left[\frac{e^2}{2}-e+2\ln e-(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1+2\ln 1-(\ln 1)^2\right)\right]$

$$S=\left[\frac{e^2}{2}-e+2\ln e-(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1+2\ln 1-(\ln 1)^2\right)\right]=\left(\frac{e^2}{2}-e+\frac{3}{2}\right)u.a$$

c) valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 (2 chiffres après la virgule)
l'unité d'aire est 4 cm^2 on a S = 9,90 cm^2

Problème 25

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$

par : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

1. $g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$, pour $x\in]0;+\infty[$; $2x^2+1>0$ et $\frac{1}{x}>0$, donc $g'(x)>0$. on en déduit que la fonction g est croissante (strictement) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. $g(1)=1^2-1+\ln 1=0$

en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et g(1) = 0 on en déduit le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. $f'(x)=a-\frac{1-\ln x}{x^2}$

2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, f(1) = 0

et f'(1) = 0 soit : $f(1)=0 \Leftrightarrow a+b-\frac{\ln 1}{1}=a+b=0$; $f'(1)=a-\frac{1-\ln 1}{1^2}=a-1=0$ Donc $a=1$ et $b=-1$ et

enfin $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

Partie C : Etude de la fonction ***f***

1. a. $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$; $\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$; $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln x\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. a. $f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

b. $f'(x)$ est du signe de g(x) sur]0 ; + ∞[, on en déduit les variations de f :

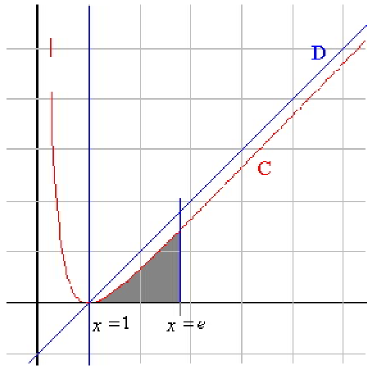
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	

c. 0 est le minimum absolue de la fonction f sur son ensemble de définition on $f(x) \geq 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0 ; + ∞[.

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a. $f(x)-(x-1)=-\frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.



b. Etudions le signe de $f(x)-(x-1)$ d'après a. il est du signe de $-\ln x$ soit :

$-\ln x>0$ équivaut à $\ln x<0$ ou encore $\ln x<\ln 1$ soit $x<1$:

si $x<1$ alors $f(x)-(x-1)>0$ donc sur l'intervalle]0 ; 1 [, la courbe C est au dessus de l'asymptote D.

si $x>1$ alors $f(x)-(x-1)<0$ donc sur l'intervalle]1 ; + ∞[, la courbe C est au dessous de l'asymptote D.

Si $x = 1$, la courbe C et la droite D se coupent en un point de coordonnées (1; 0)

c.

Partie D : Calcul d'aire

1. a. $H(x)=(\ln x)^2$: $H=u^2$ avec $u=\ln x$ et $u'=\frac{1}{x}$,

$H'=2u'u$ et on a : $H'(x)=\frac{2\ln x}{x}$

b. une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; + ∞[est

la fonction F définie par : $F(x)=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$

2. a. b.

$$S=\int_1^e f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^e=\left[\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\left[\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\right]=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)u.a$$

$$1u.a=4cm^2\Rightarrow A=4\left(\frac{e^2}{2}-e\right)=\left(2e^2-4e\right)cm^2$$