Problème 36

A.1 $g(x)=x^2+6-4\ln x$; $g'(x)=2x-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-4}{x}$; $g'(x)=\frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$.

Comme $x\in\left]0;+\infty\right[$ $\frac{2(x+\sqrt{2})}{x}>0$ Donc le signe de g'(x) dépend du signe de $x-\sqrt{2}$, d'où le tableau de variation.La fonction g admet un minimum égal à $g(\sqrt{2})=8-2\ln 2>0$.

Par conséquent g(x)> 0 sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

B- 1. $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{4})=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{x}{4})=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty\cdot\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

On déduit que la droite d'équation : x = 0 est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

3.a. Soit $h(x)=f(x)-y$; $h(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{4}$. $h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$ .Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$ .Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-y\right)=0$. On déduit que la droite Δ d'équation :

$y=\frac{x}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

b. Trouver les coordonnées du point d'intersection des courbes D et C revient à résoudre l'équation $f(x)$ = y c'est-à-dire $f(x)$ -y = 0 ou encore $h(x)$ = 0. donc $\frac{-1+2\ln x}{2x}=0$.

$x\neq0$ et $2\ln x-1=0$.

$\ln x=\frac{1}{2}$ équivaut à $\ln x=(1/2)\ln e=\ln e^{1/2}$ et x = $e^{1/2}=\sqrt{e}$. $y=f(e)=\frac{\sqrt{e}}{4}$. on a donc : $A\left(\sqrt{e};\frac{\sqrt{e}}{4}\right)$..

c- Déterminer les positions relative de la courbe C par rapport à la droite D , revient à étudier le signe de $h(x)=f(x)-y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x-1}{x}$ sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$, donc il faut étudier de $2\ln x-1$. $2\ln x-1>0$; $\ln x>1/2$, $\ln x>1/2=\ln e^{1/2}$, donc $x>e^{1/2}$. On déduit donc que sur l'intervalle $\left]\sqrt{e};+\infty\right[$ la courbe C est au dessus de la droite (Δ) . On démontre de même que sur l'intervalle $\left]0;\sqrt{e}\right[$ la courbe C est en dessous de la droite(Δ).

4.a-b $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{x^2}+\frac{x\times\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}$; $f'(x)=\frac{x^2+2+4-4\ln x}{4x^2}$; $f'(x)=\frac{x^2+6-4\ln x}{4x^2}$ et $f'(x)=\frac{g(x)}{4x^2}$.

c-Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ dépend du signe de g(x) ; or g(x) =8-2ln2 > 0 pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

Il s'ensuit que f '(x) > 0 pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.

x	0	1 $+\infty$
$f'(x)$		+ 7/4 +
$f(x)$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

5. $f'(1)=\frac{1^2+6-4\ln 1}{4\times1^2}=\frac{7}{4}$ et $f(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\ln 1}{1}=-\frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente au point A d'abscisse 1 est de la forme

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{7}{4}(x-1)-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}x-2$.

6. voir graphique à la fin du l'exercice.

7. la fonction f est définie et continue, dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et a pour fonction dérivée strictement positive

($f'(x)>0$ sur $\left]0;+\infty\right[$), f est aussi continue et dérivable sur $[1;2]\subset\left]0;+\infty\right[$, de plus $f(1)=-0,25<0$

$f(2)=1-\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}>0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe une solution Unique $\alpha\in[1;2]$ tel que $f(\alpha)=0$.à l'aide de la calculatrice , on obtient $f(1{,}17)=-0{,}0007<0$ $f(1{,}18)=0{,}011>0$, donc $1{,}17<\alpha<1{,}18$. Donc $\alpha\approx 1{,}171$.

C1- $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ avec u= ln x .

Donc une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme

$\frac{1}{2}u(x)^2$

2. Donc $H(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ sur $]0;+\infty[$.

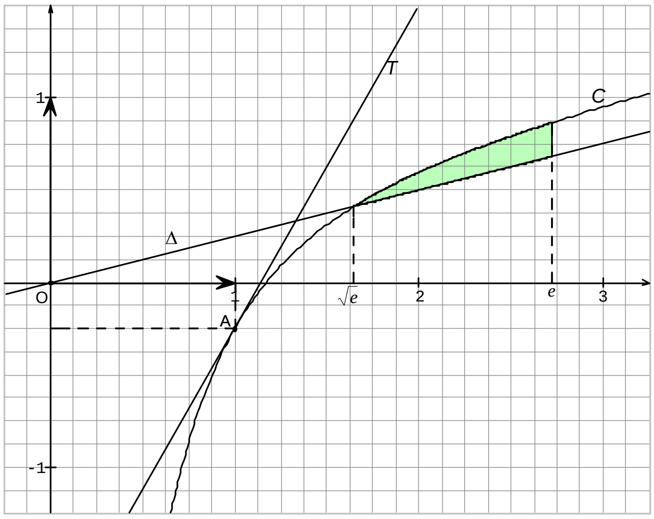
3- $A=16\times\left[H(e^2)-H(\sqrt{e})\right]$.

$H(e^2)=-\frac{1}{2}\ln e^2+\frac{1}{2}(\ln e^2)^2=-\frac{2}{2}+\frac{4}{2}=1$ et

$H(\sqrt{e})=\frac{-1}{2}\ln\sqrt{e}+\frac{1}{2}(\ln\sqrt{e})^2=\frac{-1}{4}\ln e+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2$.

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$

On déduit que $A=16\times\left(1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right)=16\left(\frac{9}{8}\right)=18cm^2$.



Problème 37

Partie A

$g(x)=a(\ln x)^2+b\ln x+c$

$A\in C$, donc les coordonnées du point A vérifie l'équation de g :

$g(1)=a(\ln 1)^2+b\ln 1+c=2$; $\ln 1=0$, donc $c=2$, de même $B\in C$, on a :

$g(e)=a(\ln e)^2+b\ln e+c=0\Rightarrow a+b+2=0$, puisque $\ln e=1$

$C\in C \Rightarrow g(e^2)=a(\ln e^2)^2+b\ln e^2+c=0\Rightarrow a(2\ln e)^2+2b\ln e+2=0\Rightarrow 4a+2b+2=0$

On doit résoudre un système d'équation linéaire à deux inconnues :

$\begin{cases}a+b=-2\\2a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow a=1 et b=-3$

Partie B

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$

1.a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left((\ln x)^2-3\ln x+2\right)$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(\ln x)^2=+\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-3\ln x=+\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\big((\ln x)-3\big)+2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\big((\ln x)-3\big)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3.a *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$; $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$ $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-3\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}-\frac{3}{x}$.

(car $(u^2)'=2u'u$ et $(\ln x)'=\frac{1}{x}$) pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2\ln x-3}{x}$.

3.b variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{2\ln x-3}{x}$ $x\in]0;+\infty[$, donc $x>0$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x-3=0\Leftrightarrow 2\ln x=3\Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{3/2}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2\ln x-3>0\Leftrightarrow 2\ln x>3\Leftrightarrow \ln x>\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>e^{3/2}$

x	0		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	$-1/4$	↗ $+\infty$	

$f(e^{3/2}) = (\ln e^{3/2})^2 - 3\ln(e^{3/2}) + 2 = (3/2\ln e)^2 - 3\times\frac{3}{2}\ln e + 2$

$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9-18+8}{8} = -\frac{1}{4}$

c. d'après 1.b, on a : $f(x)=0$ si $x=e$ ou $x=e^2$ .En regardant le tableau de variation , on peut en déduire le
signe de *f* sur $]0;+\infty[$.

$f(x)>0$ pour $x\in\left]0;e\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[$; $f(x)<0$ pour $x\in\left]e;e^2\right[$; $f(x)=0$ pour $x=e$ et $x=e^2$.

3. a. $x^2-3x+2=0$; $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times2=9-8=1$; $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ et $x_1=\frac{3+1}{2}=2$. $S=\{1;2\}$

b. sur l'intervalle $]0;+\infty[$, résolvons l'équation $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$. Posons $X=\ln x$ .l'équation devient

$X^2-3X+2=0$. On a vu que $X=1$ ou $X=2$.

$\ln x_1=1=\ln e \Leftrightarrow x_1=e$ $\qquad$ $\ln x_1=2=2\ln e=\ln e^2 \Leftrightarrow x_1=e^2$ $\qquad$ $S=\left\{e;e^2\right\}$.

c. $f(x)=(\ln x-1)(\ln x-2)$

x	0		e		e^2		$+\infty$
$\ln x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Equation de la tangente T à la tangente à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$; $f'(\sqrt{e})=\frac{2\ln(e)-3}{e}=\frac{2-3}{e}=-\frac{1}{e}$;

$f(e)=\left(\ln e\right)^2-3\ln e+2=1-3+2=0$; $y=\frac{-1}{e}(x-e)=\left(\frac{-1}{e}\right)x+1$, donc (T) : $\boxed{y=\frac{-1}{e}x+1}$.

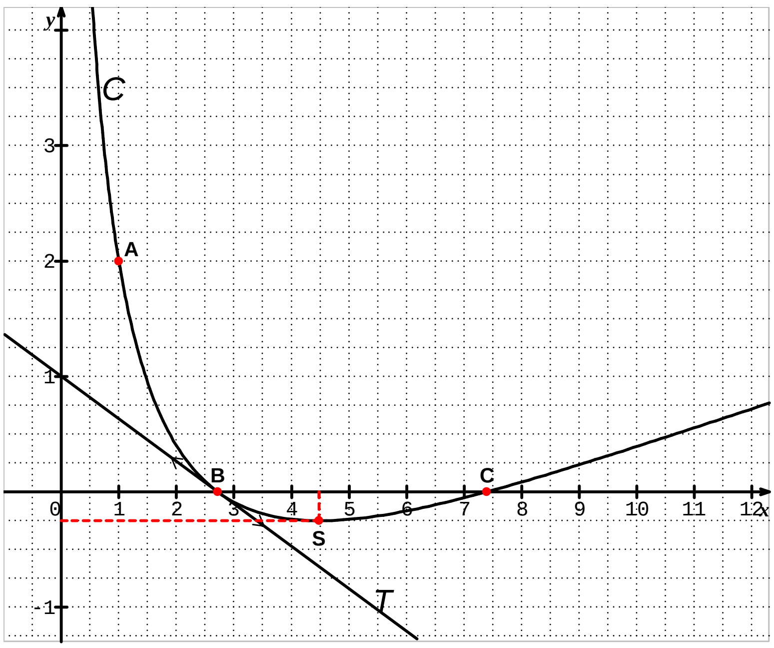
5.a. voir courbe ci-contre

b. Calculons $F'(x)$. $H(x)=x(\ln x)^2-5x\ln x+5x$

$F'(x)=(\ln x)^2+\frac{2x\times\ln x}{x}-5\ln x-5x\times\frac{1}{x}+5$

$F'(x)=(\ln x)^2+2\ln x-5\ln x-5+5$ d'où

$F'(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2=f(x)$,



6. $H(x)=x(\ln x)^2-5x\ln x+5x$

$H(e^2)=e^2\left(\ln e^2\right)^2-5e^2\ln e^2+5e^2$

$=e^2(2\ln e)^2-10e^2+5e^2$

$=4e^2-5e^2=-e^2$

$H(e)=e\left(\ln e\right)^2-5e\ln e+5e=e-5e+5e=e$.

$A=H(e^2)-H(e)=-e^2-e$

Problème 38

PARTIE A : ***Etude de fonction f***

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+\ln x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ .Il vient $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+2+\ln x\right)\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+2+\ln x\right)\times\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ .Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ alors l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C.

2)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$ $f(x)=\frac{x}{x}+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$ soit $f(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

c) On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation x =1 comme asymptote au voisinage de$+\infty$.voir courbe.

3)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$; $f'(x)=\frac{(1+\frac{1}{x})x-(x+2+\ln x)}{x^2}$ $f'(x)=\frac{x+1-x-2-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$

b) $f'(x)\geq 0$ $\frac{-1-\ln x}{x^2}\geq 0$ $et\ x\in]0;+\infty[$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ $-1-\ln x\geq 0$ $\Leftrightarrow -\ln x\geq 1\Leftrightarrow \ln x\leq -1$

$\Leftrightarrow\ x\leq\ e^{-1}=\frac{1}{e}$

$f'(x)\leq 0$ $\frac{-1-\ln x}{x^2}\leq 0$ $et\ x\in]0;+\infty[\ \Leftrightarrow\ x\ \geq\ e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Donc f '(x) s'annule en changeant de signe en $x=\frac{1}{e}$

c) Il en résulte le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$-\infty$ ↗	$1+e$	↘	1

PARTIE B :

1) g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+2}{x}$

a) $g'(x)=\frac{x-(x+2)}{x^2}$; $g'(x)=\frac{-2}{x^2}$ Comme $g'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ alors la fonction g est strictement décroissante

sur $]0;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	1

b) La courbe H admet comme asymptote l'axe des ordonnées et la droite D.

2)a) $f(x)-g(x)=\frac{x+2+\ln x-(x+2)}{x^2}=\frac{\ln x}{x}$ Sur $]0;+\infty[$ $f(x)$-g(x) est du signe de ln x

Donc $f(x)-g(x)\leq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 1$ et $f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

b) Les deux courbes C et H . se coupent en un point A d'abscisse 1, car $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x=1$

c) On en déduit que : C est au-dessous de H sur $]0;1]$ et C est au-dessus de H . sur $[1;+\infty[$

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	3	4	5	7	8
$g(x)$	21	11	5	3	2	1,8	1,7	1,5	1,4	1,29	1,25
$f(x)$	-2,03	2,95	3,61	3	2,35	2,2	2,03	1,85	1,72	1,56	1,51

Problème 39

Partie A .

1. $g(x)=x^2+3-2\ln(x)$. $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=2\frac{x^2-1}{x}=2\frac{(x+1)(x-1)}{x}$

2. sur l'intervalle I $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2\frac{(x+1)(x-1)}{x} \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, puisque $2\frac{(x+1)}{x}>0$ sur l'intervalle I.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	↘	4	↗

$g(1)=1+3-2\ln 1=1+3=4>0$. Donc la fonction g admet un minimum strictement positif égal à 4 atteint en $x=1$, on en déduit alors que pour tout nombre réel x strictement positif, par conséquent $g(x)$ est strictement positif

Partie B

1.a. $f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2x}+\frac{\ln(x)}{x}$. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1+2\ln x}{2x}\right)$.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)=1$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\ln(x)-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}(2\ln(x)-1)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$, donc $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

En déduit que la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de 0.

1.b. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+1\right)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$ $(voir\ formulaire)$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2.a&b. $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{(1/x)\times x-1\times(\ln x-1)}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+4-2\ln(x)}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	1 ↗	$+\infty$

3. a. Sur $]0;+\infty[$, la fonction f est dérivable et strictement croissante sur R.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$.Or $0\in$ R, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet sur l'intervalle $]0;+\infty[$ une solution unique notée α.

b. A l'aide de la calculatrice : $f(0,67)\approx -0,01<0$ et $f(0,68)\approx 0,04>0$

Donc $f(0,67)<0<f(0,68)$ et $f(0,67)<f(\alpha)<f(0,68)$

Donc $0,67<\alpha<0,68$ car *f* est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Un encadrement d'amplitude 0,01 du nombre réel α est : $0,67<\alpha<0,68$.

4. Equation de la droite T tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(x)=\dfrac{1+3-2\ln 1}{2}=2$ et $f(1)=1$, donc on a : $y=2(x-1)+1=2x-1$

Une équation de la droite T tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 est : $y=2x-1$.

5. a. Soit $d(x)=f(x)-y=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}$; or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}d(x)=0$

(somme limites). Donc la droite D d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ est asymptote oblique à la courbe *C* en $+\infty$.

b. La droite D coupe la courbe *C* en un point B d'abscisse x vérifiant :

$d(x)=f(x)-y=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}=0$

$-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}=0\Leftrightarrow\dfrac{2\ln x-1}{2x}=0\Leftrightarrow 2\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{1/2}$

Donc la droite D coupe la courbe *C* en un point B d'abscisse $x=e^{1/2}$.

c. Étudier les positions relatives de la courbe *C* et de la droite D sur l'intervalle $]0;+\infty[$ revient à étudier le signe de : $d(x)=f(x)-y=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}>0$. sur l'intervalle $]0;+\infty[$

$-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}>0\Leftrightarrow\dfrac{2\ln x-1}{x}>0\Leftrightarrow 2\ln x-1>0\Leftrightarrow \ln x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>e^{1/2}$

Donc : sur l'intervalle $]0;e^{1/2}[$, la courbe *C* est au dessous de la droite D.

Sur $]e^{1/2};+\infty[$, la courbe *C* est au dessus de la droite D et Pour $x=e^{1/2}$, la courbe *C* et la droite D
se coupent

6. Voir courbe en fin d'exercice

Partie C : calcul d'une aire

1. Voir courbe en fin d'exercice

2. a. La fonction H est dérivable sur $]0;+\infty[$; $H'(x)=\left(\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right)'=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x=\dfrac{\ln x}{x}$ Donc la fonction H définie par $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction *h* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

b. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$: Une primitive de $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$ est :

$F(x)=\dfrac{1}{4}x^2+x-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

c. On sait que $f(\alpha)=0$ et que *f* est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ .Donc sur $]\alpha;+\infty[$, *f* est positive. Comme 0,67 < α< 0,68, on en déduit que sur $]e^{1/2};e]$, *f* est positive, donc l'aire A, en unité d'aire, de la partie du plan hachurée E est égale :

$A=\left(\int_{e^{1/2}}^{e}f(x)dx\right)\times u.a=\left(\left[F(x)\right]_{e^{1/2}}^{e}\right)\times u.a=4\left(F(e)-F\left(e^{1/2}\right)\right)$

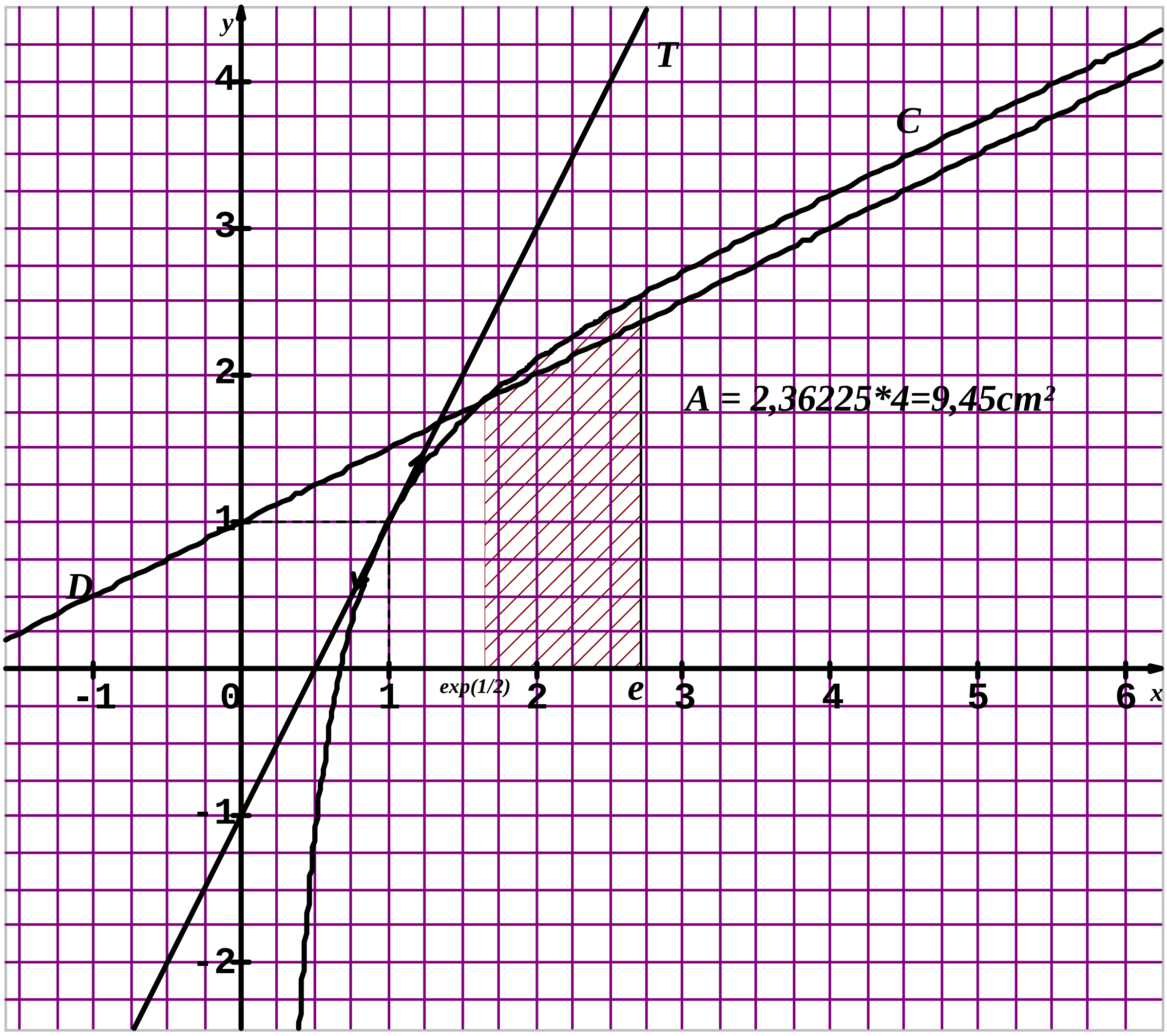
Puisque l'unité graphique est de 2 cm, donc 1 unité d'aire vaut : $2\times 2=4cm^2$.

$F(e)=\frac{e^2}{4}+e-\frac{1}{2}\times\ln e+\frac{1}{2}(\ln e)^2=\frac{e^2}{4}+e$;

$F(e^{1/2})=\frac{e}{4}+e^{1/2}-\frac{1}{2}\times\ln e^{1/2}+\frac{1}{2}\left(\ln e^{1/2}\right)^2=\frac{e}{4}+e^{1/2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{e}{4}+e^{1/2}-\frac{1}{8}$

Donc en cm^2, l'aire A vaut :

$A=4\left(F(e)-F\left(e^{1/2}\right)\right)=4\left(\frac{e^2}{4}+e-\left(\frac{e}{4}+e^{1/2}-\frac{1}{8}\right)\right)=4\left(\frac{2e^2+6e-8e^{1/2}+1}{8}\right)=9,45cm^2$ à 10^{-2} près.



Problème 39

Partie A

soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x-1-\frac{9}{2}x^2$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{1}{x}-9x=\frac{1-9x^2}{x}=\frac{(1-3x)(1+3x)}{x}$. Or x >0 donc $g'(x)=0$

Si et seulement si, $1-3x=0$ ou $1+3x=0$ c'est-à-dire $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-\frac{1}{3}$, mais $-\frac{1}{3}\notin]0;+\infty[$

Donc $g'(x)>0$ sur $\left]0;\frac{1}{3}\right[$ et $g'(x)<0$ sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$
.

x	0 $\quad\frac{1}{3}\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	+ $\quad 0 \quad$ -
$g(x)$	$\nearrow$ $-\ln 3-\frac{3}{2}$ $\searrow$

3- la fonction g admet un maximum sur $]0;+\infty[$, égal à $-\ln 3-\frac{3}{2}<0$, donc pour tout réel appartenant à $]0;+\infty[$, $g(x)$est strictement négatif.

Partie B

soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}-9x+5=5$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}-2\frac{\ln x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

La droite D d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-9x+5=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=-9-2\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=-9-\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{-9x^2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{2g(x)}{x^2}$.

Or $x^2>0$, donc $f'(x)$est strictement négatif sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations

x	0 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	-
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

2/a)soit D la droite d'équation $y=-9x+5$.

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par

$h(x)=f(x)-(-9x+5)$.pour tout $x\in]0;+\infty[$;

$h(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}-(-9x+5)=-2\frac{\ln x}{x}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$.la droite D est donc
asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

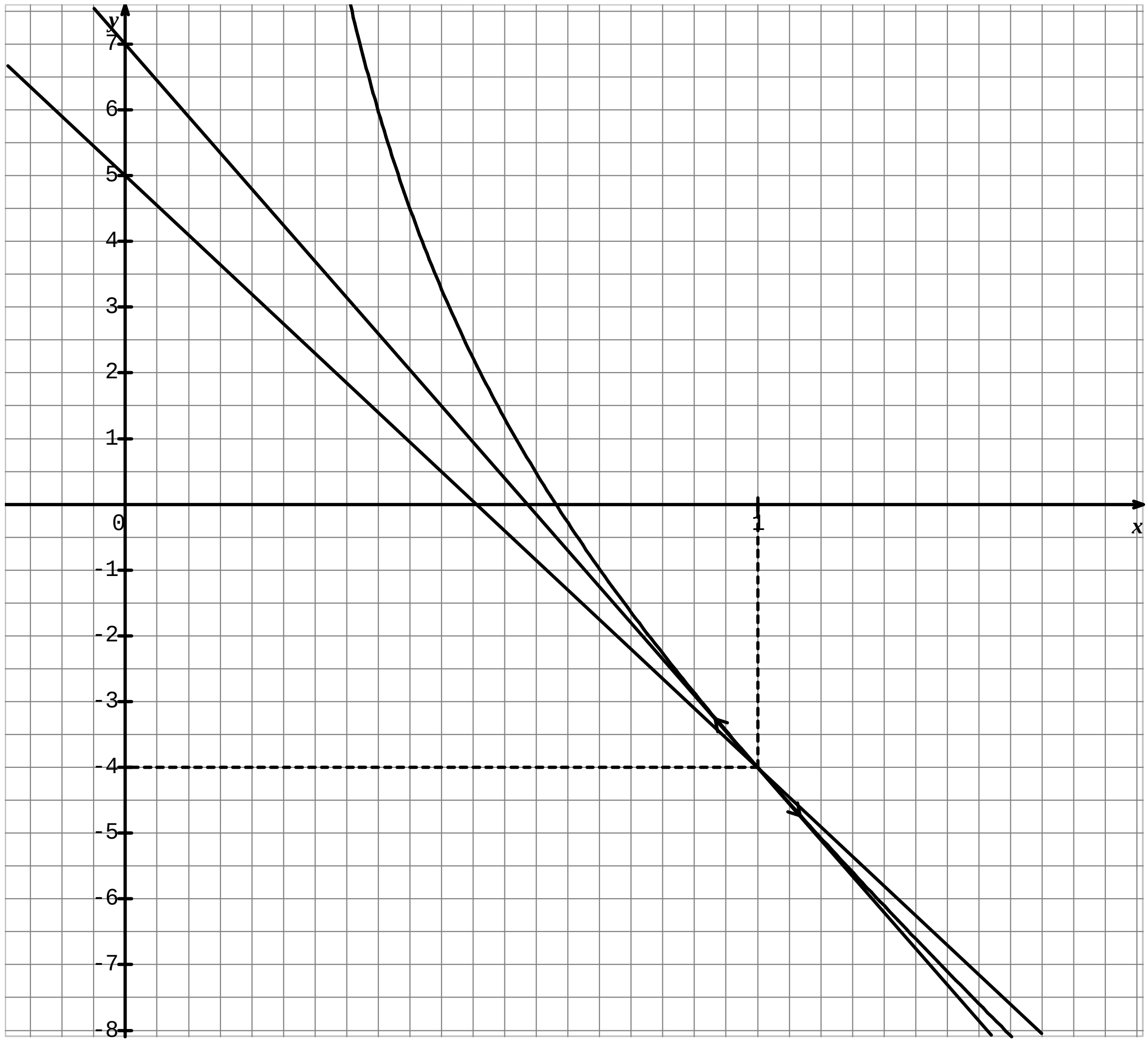
b) pour le point d'intersection de C et D , on a $h(x)=0$, c'est-à-dire $\ln x=0$, soit $x=1$, les coordonnées de ce point sont $(1;-4)$.

c) si x = 1 , on vient de voir que C et D se coupent ;
si $x>1$ on a :$\ln x>0$ et donc $h(x)<0$, d'où la courbe C est en dessous de la droite D
si $0<x<1$, on a : $\ln x<0$ et donc $h(x)>0$, d'où la courbe C est au dessus de la droite D.

3°-Tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $f'(1)=-11$ et $f(1)=-4$, donc $y=-11(x-1)-4$, soit $y=-11x+7$

b)courbes



4) la fonction *f* est dérivable est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc en particulier sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$, de plus $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+4\ln 2>0$ et $f(1)=-4<0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe un seul réel α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

Encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.on a $f(0,6)>0$ et $f(0,7)<0$, donc $0,6<\alpha<0,7$

Puis $f(0,68)>0$ et $f(0,69)<0$ donc $0,68<\alpha<0,69$.