PROBLEME 1

PARTIE A : ETUDE D'UNE FONCTION

On note f la fonction définie sur l'ensemble R des nombres réels par : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+e^{-2x}$.On désigne par ***C*** sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que $f(x)=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$, et préciser la position de la courbe ***C*** par rapport à la droite D.

2. Étude des variations de la fonction f

a. Déterminer l'expression de la dérivée f ′ de la fonction f.

b. Résoudre l'inéquation $e^{-2x}>\frac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f .

c. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe ***C*** en son point d'abscisse 0.

d. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$.

Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

3. Tracer, dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, les droites D et T , puis tracer la courbe ***C***

PARTIE B : CALCUL D'UNE AIRE

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à ln2. On note ***A***(m) l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe ***C*** , la droite D et les droites d'équations $x=\ln 2$ et $x=m$.

Déterminer ***A***(m) en fonction de m.

2. Calculer la limite de ***A***(m) lorsque m tend vers $+\infty$.

PROBLEME 2

Soit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-2\ln 2+1$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2+4$	↗	$+\infty$

1. Déterminer D_f

2.a. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition puis interpréter les résultats.

b.Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x^2}\right)$

c.Determiner $f(]-\infty;2]);f(]0;+\infty[);f(]-\infty;0[)$ et $f([-2;+\infty[)$

3.a. Déterminer $f'(-\ln 2)$et $f'(-\ln 2)$

b. Déterminer le nombre de solution des équations suivantes :

$f'(x)=0$; $f(x)=0$; $f(x)=-3$ et $f(x)=1$

4.On suppose que : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-5e^{x}+2}{(e^{x}-1)^{2}}$.Déterminer l'expression de $f(x)$sachant qu'elle de la forme $f'(x)=ax+b+\dfrac{e^{x}}{e^{x}+c}$ 5.Etudier le signe de $f(x)$ a l'aide de son tableau de variation.

6. En s'inspirant du tableau de variation tracer (C_f) et tous ses asymptotes.

PROBLEME 3

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+2x-3$.On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$du plan.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-3$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante : $f(x)=e^{-x}\left(1+2xe^{x}-3e^{x}\right)$

   b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$).

3. a. Déterminer f ′(x) et montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}}$En déduire le signe de f ′(x) sur $\mathbb{R}$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;2]$. Donner une valeur approchée de α .

5. On considère le point A de la courbe (C) d'abscisse $-\ln 3$.

   a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.

   b. On note (T) la tangente à la courbe (C) au point A. Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) est −1. Déterminer l'équation de (T).

6. Construire avec soin la courbe (C) et les droites (D).

PARTIE B

1. Vérifier que la fonction F définie sur R par $F(x)=-e^{-x}+x^{2}-3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (E) le domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$et $x=1$. Hachurer le domaine (E).Soit (A) l'aire du domaine (E)en unités d'aire, calculer la valeur exacte de (A).Donner une valeur approchée de (A) à 10^{-2} près.

PROBLEME 4

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal (O, I, J), l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE A.

Soit g la fonction définie sur R par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur R. En déduire le signe de g.

2. Justifier que $\forall x \in R,\ h(x)=e^x-x>0$

PARTIE B

1. Justifier que $D_f=R$

2. a. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. a. Justifier que $\forall x \in R, f'(x)=\frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$

   b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

4. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la **Partie A**, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T)

5. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C_f).

PROBLEME 5

Partie A

1. a. Résoudre dans l'ensemble ℝ des nombres réels l'équation : $2X^2-5X+2=0$.

   b. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, de l'équation $2(\ln x)^2-5\ln x+2=0$ .On pourra poser $X=\ln x$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=2(\ln x)^2-5\ln x+2$.
Soit C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier la limite de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   b. Déterminer la limite de f en + ∞ (on pourra factoriser par ln x).

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{4\ln x-5}{x}$.

   b. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   c. En déduire le signe de f(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.On pourra remarquer que la fonction f s'annule en $\sqrt{e}$ et en e^2.

3. Donner une équation de la tangente T et la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

4. Tracer la courbe C et la tangente T dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

5. a. Hachurer le domaine A du plan situé en dessous de l'axe (Ox) et compris entre la courbe C et l'axe (Ox).

b. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x(2(\ln x)^2-9\ln x+11)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PROBLEME 6

I. Soit f la fonction de la variable réelle définie par : $f(x)=4-x+\frac{x}{e^x}$

a- Déterminer le domaine de définition de f.

b- Calculer les limites de f(x) aux bornes de son domaine de définition.

a- Montrer que la droite y = -x+4 est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.

II. Soit la fonction g définie par : $g(x)=\frac{1-x}{e^x}-1$

a- Etudier le signe de g(x) et dresser son tableau de variation.
En déduire le tableau de variation de la fonction f.

b- Déterminer les solutions de f(x) = 0 à l'aide du tableau de variation de f.

PROBLEME 7

On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0], f(x)=xe^x \\ \forall x \in [0;+\infty[, f(x)=x\ln x \end{cases}$

1-a- Donner l'ensemble de définition Df de f.

b- Etudier la dérivabilité et la continuité de f.

2- Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.

3- Etudier le signe de la dérivée f'(x).

4- Dresser le tableau de variation de f.

5- On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan

a- Montrer que (C) admet une asymptote en $-\infty$ dont on précisera l'équation.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire ?

c- Donner les tangentes à (C) respectivement aux points $A\left(-1;\frac{-1}{e}\right)$ et $B\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$

d- Donner les tangentes au point O à la courbe (C).

6- Construire la courbe (C) après avoir complété le tableau ci-dessous.

X	-2,5	-2	-1	0	$\frac{1}{e}$	1	2	2,5
Valeurs approchées de f(x) à 10^{-2} près.				0		0		

PROBLEME 8

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{2x} \ln (1+e^{-2x})$.

Partie A :
on considère la fonction numérique g définie sur IR par :

$$g(x) = \ln(1+ e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x}+1}$$

1- Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2- Etudier le sens de variation de g sur IR.
3- En déduire que quelque soit x élément de IR, $g(x) > 0$.

Partie B :

1- Calculer la limite de f en $+\infty$

2-a- Démontrer que $\forall$ x $\in$ IR, $f(x) = e^{2x}\left[-2x + \ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$ en remarquant que $e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$

b- En déduire la limite de f en $-\infty$
3-a- Démontrer que $\forall$ x $\in$ IR, $f'(x) = 2.e^{2x}.g(x)$
b- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4- Représenter la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (O, I, J) unité : 5 cm.
5- Soit **A** l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation x = 0 et x = 1. Calculer **A**.

PROBLEME 9

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = |x \ln x|$

1. Exprimer $f(x)$ sans les valeurs absolues.
2.a. Montrer que f est prolongeable par continuité au point 0. b. Donner ce prolongement φ
3. Etudier la continuité de f en 1
4.a. Etudier la dérivabilité de f en 1 b. Interpréter graphiquement ce résultat
5. a. Etudier dérivabilité de φ en 0 b. Interpréter graphiquement ce résultat
6. Dresser le tableau de variation der f 7.Tracer sa courbe (C_f)