Fonction Exponentielle Népérienne

Problème 1

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=x-2+e^{-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$,l'unité de longueur est 2 cm.

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2-a)Calculer les limites de f en $+\infty$ sachant que $f(x)=x-2+\dfrac{1}{e^x}$

b) Vérifier que pour tout nombres réel x non nul, $f(x)=x\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xe^x}\right)$

c) En déduire la limite de f en $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

3-a)Démontrer que pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x}$

b) Montrer que

$$\begin{cases}\forall x\in\left]-\infty;0\right], f(x)\le 0\\ \forall x\in,\left]0;+\infty\right[\ f(x)>0\end{cases}$$

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-2$ est asymptote oblique à (C_f)

5) Etudier suivant les valeurs de x la position relative de (C_f) par rapport à (Δ)

6) Tracer (Δ) et (C_f) dans le même repère

Problème 2

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x)=e^{2x}-10e^x+16$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

(unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x)=(e^x-2)(e^x-8)$.

   b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f .

   a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=2e^x(e^x-5)$

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les variations de la fonction f sur **R**.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$				7			

5. a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 0.

   b) Construire la droite T puis, sur le même graphique, la partie de la courbe C_f correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle [-3 ; 2,2].

   c) Compléter le graphique précédent en traçant la droite d'équation $y=16$. On mettra en évidence le point B de C d'abscisse ln 5, ainsi que la tangente à C_f en ce point.

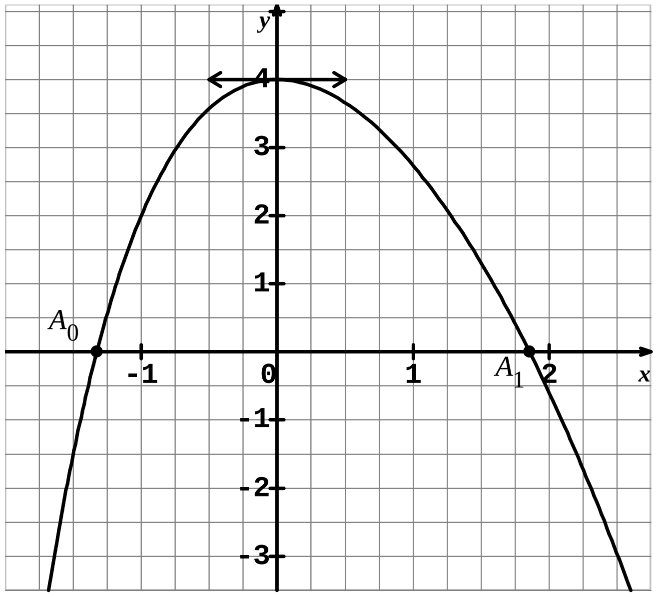
6. a) Calculer $f(\ln 2)$. Indiquer, sans justification, le signe de la fonction f sur l'intervalle [0 ; ln 2].

   b) On considère le domaine plan D limité par la courbe C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$. Calculer l'aire A du domaine D. Donner une valeur approchée de A au centième.

Problème 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 2 cm. La représentation graphique C_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite T sont tracées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan ci-dessous. La courbe C_f passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et (0 ; 4). La droite T, parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Partie A : étude graphique



1. Donner les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Sachant que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3. On désigne par $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Déterminer graphiquement $f\,'(0)$.
   b) Déterminer par lecture graphique le signe de $f\,'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1;2]$.
4. On admet qu'il existe deux constantes réelles *a* et *b* telles que, pour tout nombre réel x, on ait :
   $f(x) = (x+a)e^{-x} + bx^2 + 3$.
   En utilisant les résultats de la question **1.**, déterminer les nombres réels *a* et *b*.

Partie B : Etude de la fonction f sans utilisation graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur R par : $f(x) = (x+1)e^{-x} - x^2 + 3$

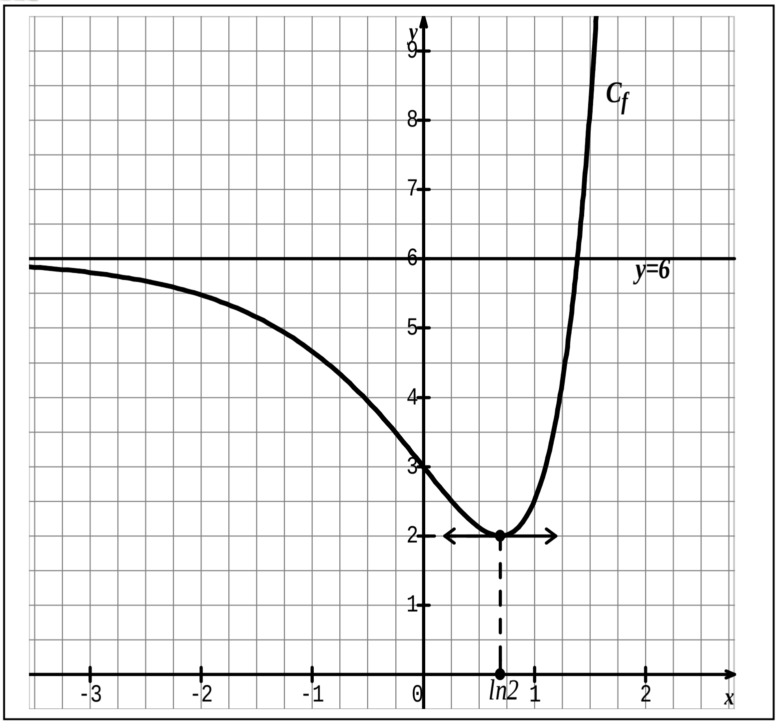
1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2. En remarquant que $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - x^2 + 3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. a) Montrer que pour tout nombre réel, $f\,'(x) = -x(e^{-x} + 2)$.
   b) Etudier le signe de $f\,'(x)$ selon les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$.
   Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du réel x_1.

Partie C : Calcul d'une aire

1. a) On considère les fonctions g et G définies sur **R** par $g(x) = (x+1)e^{-x}$ et $G(x) = (-x-2)e^{-x}$.
   Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur **R**.
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur **R**.
2. On désigne par P la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. On appelle A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie P.
   Calculer la valeur exacte de A, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

Problème 4

Partie A - Etude de la représentation graphique d'une fonction f



On donne, ci-dessous, la représentation graphique C d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble **R**,
des nombres réels. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 1,5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée. La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse ln 2. La droite d'équation y = 6 est asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$ .La courbe C_f admet une tangente de coefficient directeur -2 au point $A(0;3)$.

Par lecture graphique et en utilisant les informations ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs $f(\ln 2)$ et $f(0)$?
2. Déterminer, en le justifiant, $f'(\ln 2)$ et $f'(0)$.
3. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

Partie B **-** On admettra maintenant que f est la fonction définie sur R par : $f(x)=e^{2x}-4e^{x}+6$ et on se propose dans cette partie de retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement dans la partie A.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x)=(e^{x}-2)^{2}+2$. Calculer $f(\ln 2)$.

2. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Quelle propriété de la courbe C_f présentée dans la **partie A**, est ainsi confirmée ?

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en utilisant l'expression de $f(x)$ donnée en **B.1.**

4. a) Déterminer la fonction dérivée f'de la fonction f et vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-2)$
   b) Résoudre sur R l'équation $f'(x)=0$.
   c) Résoudre sur R l'équation $f'(x)>0$.
   d) En déduire sur R, le tableau de signe de $f'(x)$, puis les variations de la fonction f. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ et les limites trouvées en **B.3.a)** et **B.4.**.

5. Montrer que l'équation $f(x)=7$ admet une unique solution α sur R. Donner, en le justifiant un encadrement de α à 10^{-1} près.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Montrer que la fonction F définie sur **R** par : $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}+6x$ est une primitive de la fonction f sur **R**.
2. Hachurer sur la figure la partie du plan comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites
   d'équation $x=0$ et $x=1$.
3. Soit A l'aire en cm² de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de A, puis en donner

une valeur arrondie au centième.

Problème 5

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x)=e^{2x}-5e^{x}+4$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A : Limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite D d'équation $y=4$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

2. a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=(e^{x}-1)(e^{x}-4)$.

 b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie **A. 2. a)**, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

Partie C : Etude des variations de la fonction f

1. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

 b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Montrer <u>en détaillant vos calculs</u>, que. $f\left(\ln\frac{5}{2}\right)=-\frac{9}{4}$

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.

4. A l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie **B**, donner le tableau de signes $f(x)$ sur **R**.

5. Tracer la droite D puis la courbe C_f, pour appartenant à l'intervalle $[-4;2]$, dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie D : calcul d'une aire

1. Déterminer une primitive *F* de f sur **R**.

2. a) Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 4$. Donner une valeur approchée au mm² près de cette aire.