Problème 21

On numérote les propriétés :

(1) la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;

(2) $e^0 = 1$;

(3) pour tout réel *x*, on a $e^x > x$;

(4) soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où *A* est un réel positif. Si, pour tout *x* de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x) \le \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. La dérivée de *g* est $g'(x) = e^x - x$ (utilisation de (1)) qui est positive (utilisation de (2)) ; par ailleurs $g(0) = 1$ (utilisation de (3)), soit $g(x) \ge 1$ et donc $g(x) \ge 0$.

b. On a donc $e^x \ge \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2}$; comme $\frac{x}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (utilisation de (4)).

2. $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$.

a. L'exponentielle est toujours positive ; sur $[0\,;+\infty[$, il en est de même de $\frac{1}{4}x$ donc $f(x) \ge 0$.

b. On pose $X = \frac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(x) = \frac{1}{2} \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$ (croissances comparées). La courbe de f admet l'axe (O*x*) comme asymptote horizontale.

c. $f'(x) = \frac{1}{4}\left[e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}}\right] = \frac{1}{8}[2-x]e^{-\frac{x}{2}}$ donc positive avant 2, négative après. $f(2) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{2e}$	↘ 0

3. a. $F'(x) = f(x)$ (cours…) qui est positive sur $[0\,;+\infty[$ comme le montre le tableau de variation.

b. Soit on intègre par parties, soit on dérive $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ en vérifiant que $F(0) = 0$.

$F(0) = 1 - e^0 - 0e^0 = 1 - 1 = 0$; $F'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \left[\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right] = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = f(x)$.

c. Tous les termes contenant $e^{-\frac{x}{2}}$ tendent vers 0 donc *F* tend vers 1.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	+	
$F(x)$	0 ↗	1

d. *F* est monotone strictement croissante, continue sur $[0\,;+\infty[$; $0 < 0,5 < 1$, il existe donc un unique α dont l'image par *F* est 0,5. La calculatrice donne : $f(3,35) \approx 0,499$ et $f(3,36) \approx 0,501$; on prend $\alpha \approx 3,36$.

4. $A_n = F(n) - F(0) = F(n)$; on a donc $A_n \ge 0,5$ lorsque $n \ge \alpha$, soit pour $n = 4$.