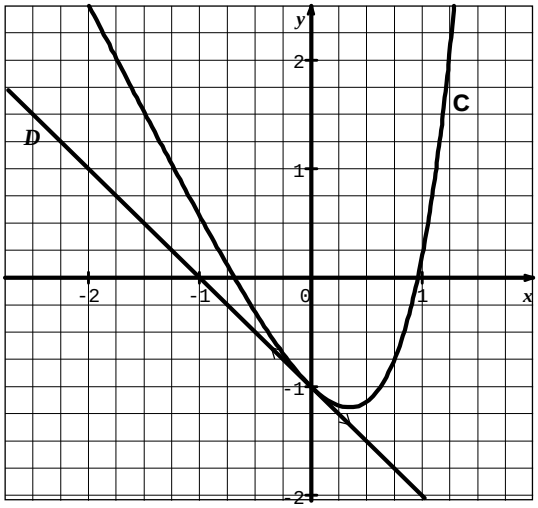
Problème 31

On considère une fonction *f* définie sur l'intervalle $[-2;2]$.



Partie A

La figure ci-dessous donne une partie de la courbe C représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormal du plan, ainsi que la droite D, tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On note *f'* la fonction dérivée de *f* sur $[-2;2]$.

1. Par lecture graphique et sans donner de justification :

a. Déterminer *f* (0).

b. Donner le nombre de solutions de l'équation *f* (*x*) = 0.

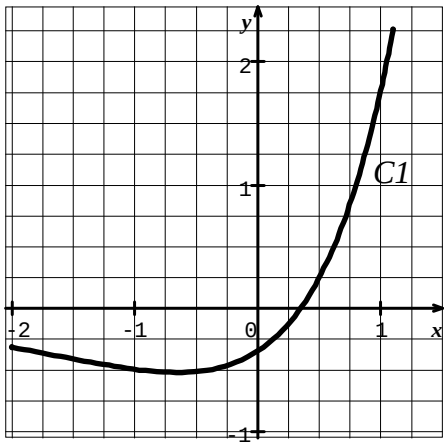
Aucune valeur approchée de la (ou des) solution(s) n'est demandée.

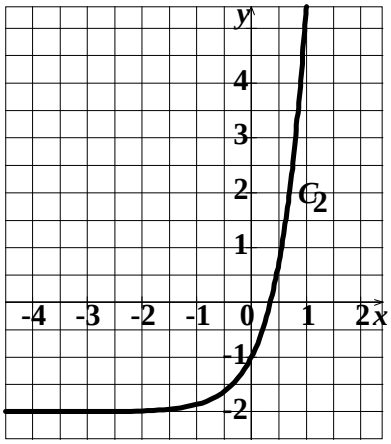
c. Donner le nombre de solutions de l'équation *f'*(*x*) = 0.

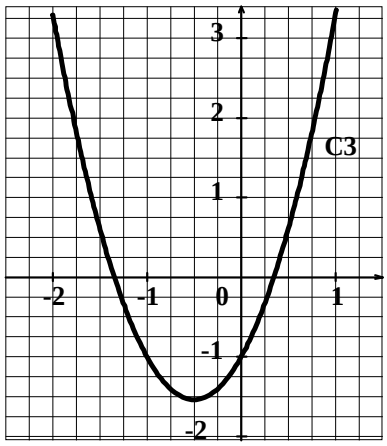
Aucune valeur approchée de la (ou des) solution(s) n'est demandée.

2. Par lecture graphique et en justifiant votre réponse, déterminer *f'*(0).

3. L'une des deux courbes C1, C2, C3 ci-après est la courbe de la fonction *f'*, fonction dérivée de la fonction *f*. En justifiant votre réponse, éliminer les deux courbes qui ne peuvent pas représenter *f'*.







Partie B

La fonction f étudiée dans la première partie est définie sur $[-2;2]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2x-1{,}5$

1. Calculer $f(0)$.

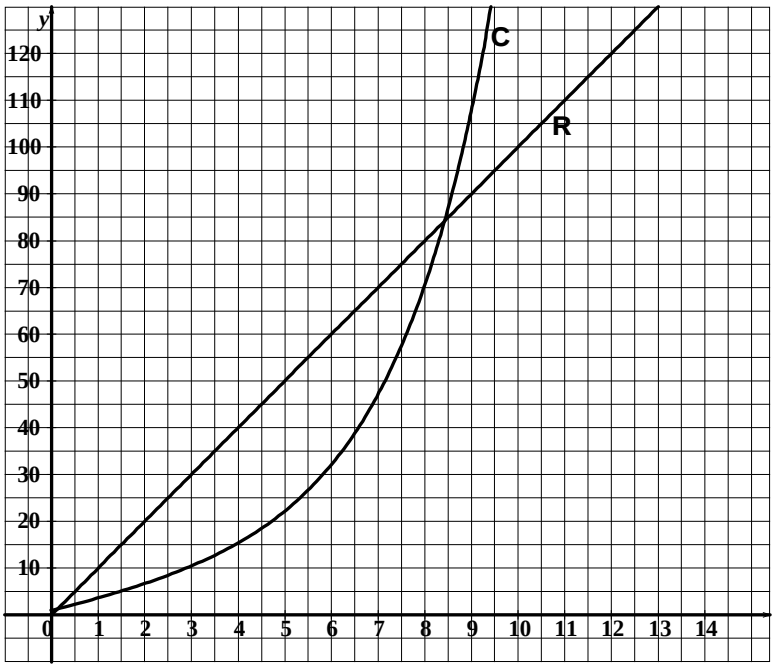
2 .a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

b. Résoudre dans $[-2;2]$, l'inéquation $e^{2x}-2\geq 0$

c. En déduire l'intervalle sur lequel la fonction f est croissante.

Problème 32

Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs. On désigne par x, le nombre de centaines de sacs fabriqués par jours dans l'entreprise .Le coût de fabrication de x centaines de sacs, exprimé en centaines d'euros, est donné par $C(x) = 2x + e^{0,5x}$.
Chaque sac est vendu 10 euros , on note $R(x)$ la recette, exprimée en centaines d'euros, correspondant à la vente de x centaines de sacs : $R(x) = 10x$.



Partie 1 : lecture graphique
Voici les représentations graphiques des fonctions C et R.
1. parmi ces deux représentations graphiques , quelle est celle de la fonction R ?
2. à l'aide du graphique, recopier et compléter le tableau suivant :

x			8
$C(x)$	10		
$R(x)$		40	

3. Arrondi à la centaine de sacs, combien de centaines de sacs faut-il fabriquer pour que l'entreprise soit
certaine d'être bénéficiaire ?

Partie 2
On note $B(x)$ le bénéfice journalier, exprimé en centaines d'euros, réalisé par l'entreprise
1. Montrer que $B(x) = 8x - e^{0,5x}$
2 .a. Calculer $B'(x)$. La notation B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.
b. Montrer que dans $[0;15]$, résoudre $B'(x) \leq 0$ revient à résoudre $e^{0,5x} \geq 16$.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[0;15]$.
d. En déduire la valeur exacte de x pour laquelle B admet un maximum.
On donnera une valeur arrondie de cette valeur exacte à 10^{-2} près .
3. En déduire la valeur maximale du bénéfice arrondi à l'euro.

Problème 33

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $f(x) = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm
sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A
L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
1. Déterminer la limite de f en +∞.
2. a. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif *x*, $f(x) = \dfrac{e^x}{x}(x\ln x + 1)$
On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$. En déduire la limite de *f* en 0.
b. Montrer que la courbe C admet une asymptote D dont on donnera une équation.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

1. a. On désigne par g' la dérivée de la fonction g .

Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif *x*, $g'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$

b. Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction *g* est strictement croissante sur l'intervalle]0 ;+∞[.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1/2;1]$

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

3. Déduire des questions B1° et B2° le signe de $g(x)$, pour *x* appartenant à l'intervalle]0 ;+∞[.

Partie C : étude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = e^x g(x)$, pour tout nombre *x* appartenant à l'intervalle]0 ;+∞[.

b. En déduire le signe de *f '*(*x*) sur l'intervalle]0 ;+∞[.

2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

b. Calculer une valeur approchée à 10.1 près de $f(\alpha)$, en prenant 0,6 pour valeur approchée de α .

3. a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5
$f(x)$ à 10^{-2} près									

b. Construire l'asymptote D et la courbe *C* pour *x* appartenant à l'intervalle]0 ; 2,5].

4. Montrer que la fonction *F*, définie sur l'intervalle]0 ;+∞[par $F(x) = e^x \ln x$ est une primitive de f .

5. On désire calculer l'aire de la partie E du plan comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les

droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de E en unités d'aires, puis en cm^2 .

Problème 34

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = -x - 1$; où *y* désigne une fonction de la variable *x*,

définie et dérivable sur l'ensemble des réels R .

1. a) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

b) Déterminer la solution *h* de cette équation différentielle *y'* + *y* = 0 prenant la valeur 1 / *e* en *x* = 1.

2. Déterminer le nombre réel *a* tel que la fonction *u* définie sur R par $u(x) = e^{-x} + ax$ soit solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire f

La fonction *f* est définie sur R par : $f(x) = e^{-x} - x$.

1. Déterminer les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et $-\infty$.

2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction *f*

Calculer, pour tout réel *x*, $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction *f*.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; l].

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. Préciser le signe de *f*(*x*) sur l'intervalle [0 ; l].

Partie C : Calcul de Faire d'une partie du plan

La représentation graphique C de la fonction f, dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est tracée sur la

feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie D limitée par la courbe C

l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l' aire de la partie D du plan.

Partie D : Étude d'une fonction g et représentation graphique

La fonction g est définie sur $]-\infty;\alpha[$ par : $g(x)=\dfrac{x}{e^{-x}-x}$ (où α désigne le nombre réel trouvé à la partie B) et on note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Vérifier que, pour tout $x\in]-\infty;\alpha[$ $g(x)=\dfrac{xe^{x}}{1-xe^{x}}$

b) En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α.

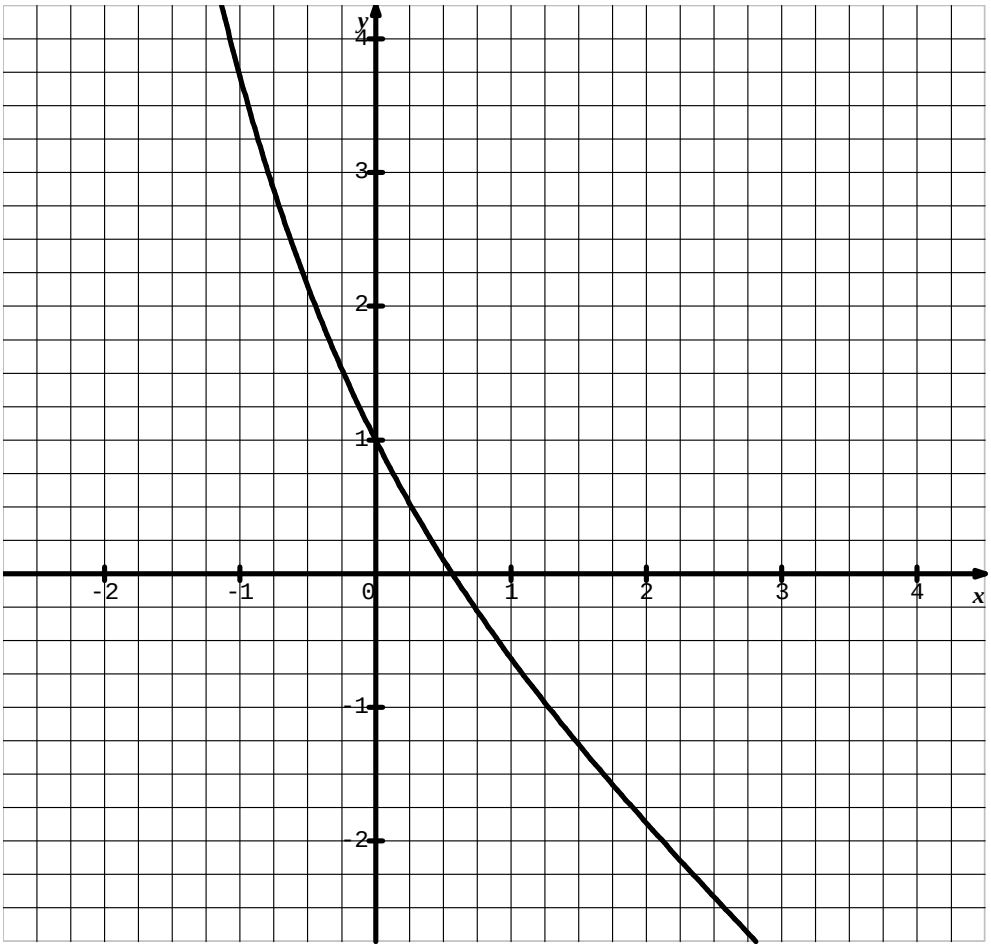
Interpréter graphiquement cette limite.

3. a) La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout $x\in]-\infty;\alpha[$:

$$g'(x)=\frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}-x)^{2}}$$

b) En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty;\alpha[$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.

4. Tracer la courbe représentative C_g de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie



Problème 35

Partie A: Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E): y'+5y=5x^3+3x^2+5$, où y représente une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble R des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'+5y=0$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction u, définie sur R par $u(x)=ax^3+b$, soit solution de l'équation différentielle (E).
3. Soit h la fonction définie sur R par $h(x)=ke^{-5x}+x^3+1$ où k est un nombre réel.
   a) Vérifier que h est solution de l'équation (E).
   b) Déterminer le réel k tel $h(0)=2$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=-3e^{-5x}+x^3+1$.

1. a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. a) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur R et dresser son tableau de variations.
3. a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   b) Établir que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; 1].
   c) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel α.
   d) Déterminer selon les valeurs du réel x, le signe de $f(x)$.

Partie C : Courbe représentative de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm
sur l'axe des ordonnées.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit u la fonction définie sur R par : $u(x)=x^3+1$. La représentation graphique Γ de la fonction u,
   dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est tracée sur la feuille jointe en annexe.
   a) On pose, pour tout réel x $d(x)=f(x)-u(x)$.
   Étudier le signe de $d(x)$.
   b) En déduire la position de la courbe C par rapport à la courbe Γ.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie
   au centième de $f(x)$.

x	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$								

3. Tracer la courbe C dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire

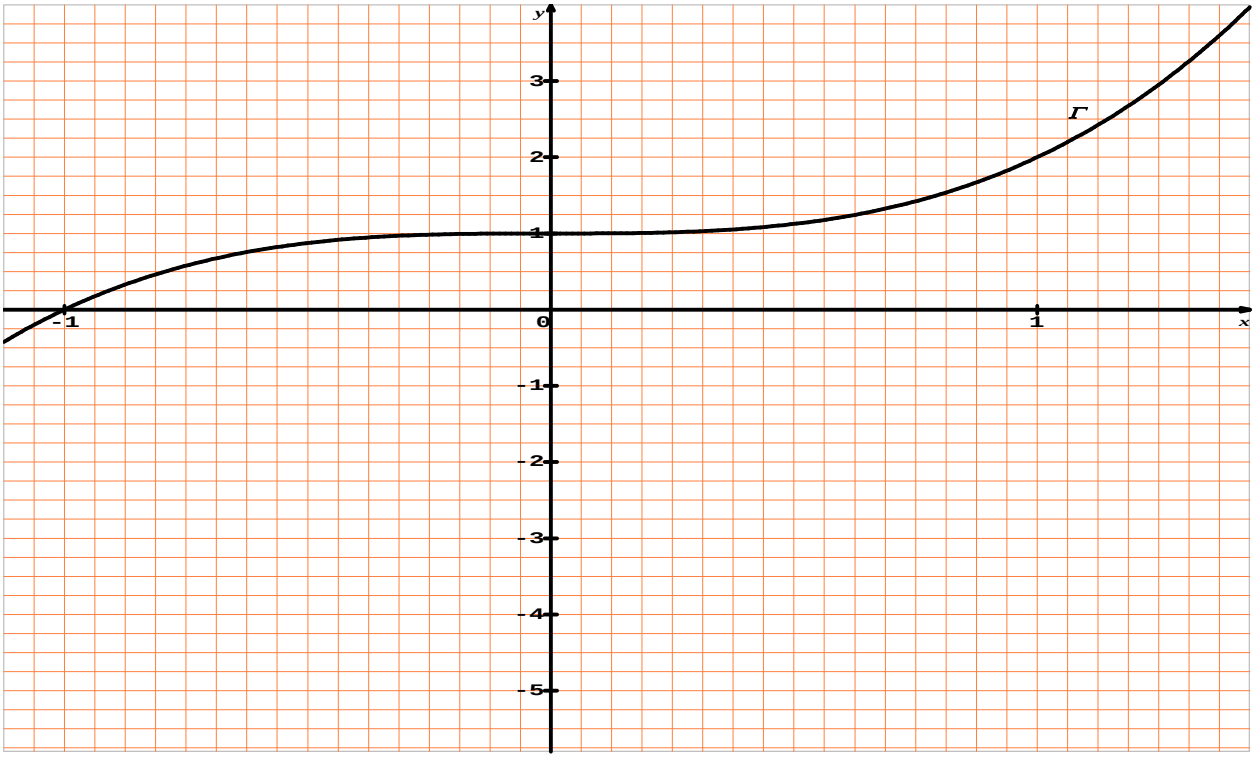
On appelle P la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation
$x=1/2$ et $x=1$.

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie P du plan.
2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire A de la partie P du plan.
   Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie

sera prise en compte dans l'évaluation.

Fomesoutra.com ça soutra !

ANNEXE DU PROBLÈME À REMETTRE AVEC LA COPIE



Problème 36

Partie A : Détermination d'une fonction g

On désigne par (E) l'équation différentielle $2y' + y = 0$, dans laquelle *y* désigne une fonction de la variable *x* définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels R. *y*′ désigne la fonction dérivée de *y*.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Soit *f* la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant *f* (2) = e.

   Démontrer que, pour tout nombre réel *x*, $f(x) = e^{2-x/2}$.
3. Pour tout nombre réel *x*, on pose $g(x) = (2x+1)\left[f(x)\right]^2 - 9$.

   Montrer que $g(x) = (2x+1)e^{4-x} - 9$.

Partie B : Étude de la fonction g

On désigne par *C* la courbe représentative de la fonction *g* dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de *g* (*x*) lorsque *x* tend vers $-\infty$.
2. a. Montrer, que pour tout nombre réel *x*, $g(x) = 2e^4 xe^{-x} + e^4 e^{-x} - 9$.

   b. Utiliser cette expression pour déterminer la limite de *g* (*x*) lorsque *x* tend vers $-\infty$.

   c. En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
3. a. On désigne par *g* ′ la fonction dérivée de la fonction *g* .Montrer que pour tout réel *x*, $g'(x) = (1-2x)e^{4-x}$.

   b. Déterminer le sens des variations de *g* et dresser le tableau de variations de *g* sur R .
4. a. Calculer la valeur exacte des nombres $g(-1)$ et $g(0)$.

   b. Démontrer que l'équation *g* (*x*) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [−1 ; 0].

Fomesoutra.com
ça soutra !

c. Donner l'arrondi au centième de α.

5. Déterminer une équation de la droite D tangente à la courbe *C* au point d'abscisse 4.

6. a. Compléter le tableau de valeurs de *g* qui se trouve sur la feuille annexe à rendre avec la copie. On arrondira les valeurs à l'unité.

b. Tracer la droite Δ, la droite D, puis la courbe *C*, dans le repère figurant sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Partie C : Calcul d'aire

1. Démontrer que la fonction *G* définie sur R par $G(x) = (-2x-3)e^{4-x} - 9x$.

est une primitive sur R de la fonction *g*.

2. a. Hachurer la partie H du plan délimitée par la courbe *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = 4$.

b. Calculer en unités d'aire la mesure exacte de l'aire de la partie *H* du plan.

c. En déduire en cm² la valeur arrondie au centième de l'aire de *H*.

On rappelle que les unités graphiques sont : 2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée

Tableau des valeurs de la fonction *g* (valeurs arrondies à l'unité)

x	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$											

Repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée

Problème 35

I-Pour chacune des questions, une seule des réponses **a, b** ou **c** est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

On définit la fonction *f* sur l'ensemble R des nombres réels par : $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$.

Le plan est rapporté au repère orthononnal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative C de la fonction *f* dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

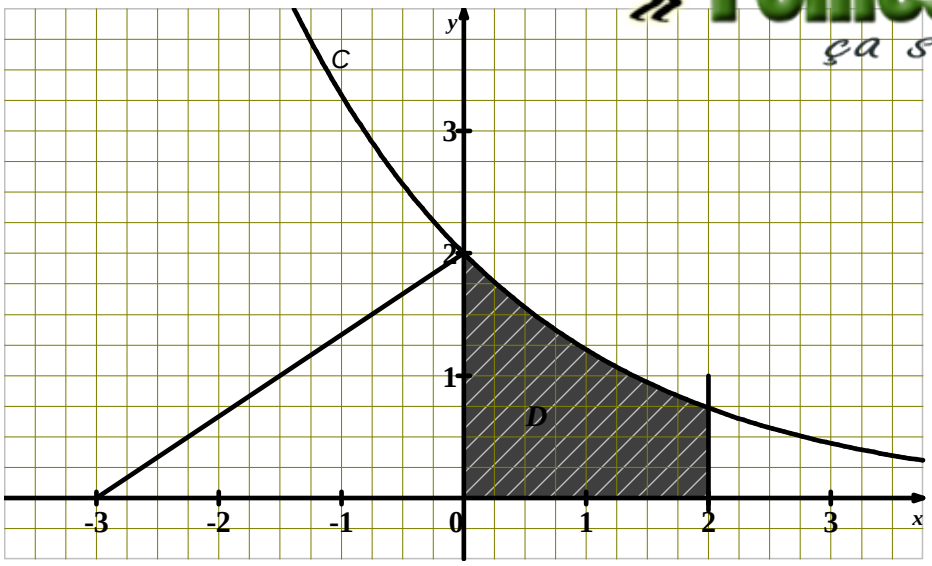
On note A et B les points de coordonnées respectives (−3 ; 0) et (0 ; 2).

On note D le domaine (hachuré ci-dessous) délimité par :

• la courbe C ,

• l'axe des abscisses, • l'axe des ordonnées, • la droite d'équation : $x = 2$.

Fomesoutra.com
ça soutra !



1 .

a. La fonction *f* est une solution de l'équation différentielle (E) :

Réponse a. : (E) : $2y'+y=0$; **Réponse b**. : (E) : $2y'-y=0$; **Réponse c**. : (E) : $y'-y=0$.

(*y* désigne une fonction inconnue définie sur l' ensemble des nombres réels de variable *x* ; *y'* désigne la fonction dérivée de la fonction *y*.)

b. La courbe C a pour asymptote la droite d'équation :

Réponse a. : $y=-2x$; **Réponse b** : $x=0$; **Réponse c**. : $y=0$.

2. On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

La valeur V du volume du solide S est donnée par : $V=\pi\int_0^2[f(x)]^2\,dx$ (en unités de volume).

La valeur V du volume du solide S, en cm² est égale à :

Réponse a. : $4\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse b**. : $16\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse c.** : $32\pi\left(1-e^{-2}\right)$.

Problème 37

Partie A

Cet exercice est un questionnaire a choix multiples (QCM).

Pour chaque question, trois réponses sont proposées .Une seule des réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

Vous reporterez sur votre copie la réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

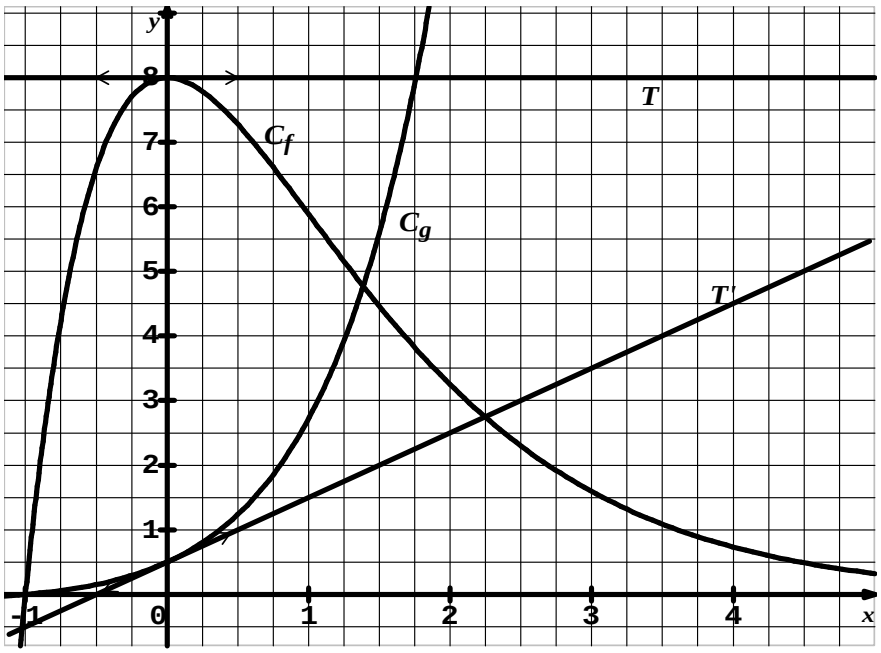
1. Soit *f* la fonction dérivable sur R définie par : $f(x)=(2x+3)e^{-x}$.

Sa fonction dérivée *f '* est donnée par :

a. $f'(x) = 2e^{-x}$ b. $f'(x) = (-2x-3)e^{-x}$ c. $f'(x) = (-2x-1)e^{-x}$.

2. Soient *f* et *g* les fonctions définies et dérivables sur telles que $f(x) = \frac{8(x+1)}{e^x}$ et $g(x) = 0,5(x+1)e^x$

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé les courbes C_f et C_g représentant les fonctions *f* et *g* sur l'intervalle [−1 ; 4]. On désigne par T et T ' les tangentes respectives à C_f et C_g au point d'abscisse 0.



a. $f(0)$ est égale à :

a. -1 **b.** $0,5$ **c. 0** **d. 8**

b. $f'(0)$ est égale à :

a. -1 **b.** 0 **c. 1** **d. 8**

c. sur l'intervalle $[-1;4]$ l'équation $f(x) = g(x)$ a :

a. Trois solutions **b . Deux solutions** **c. Une solution** **d. Aucune solution**

d. g a pour dérivée :

a. $(0,5x+1)e^x$ **b.** $0,5e^x$ **c.** $0,5\,x\,e^x$ **d.** $0,5(x+1)e^x$

Problème 38

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = (x+3)e^x - 1$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g' , le sens de variation de g.
   En déduire le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique □ qui appartient à l'intervalle $]-4;0[$.

4. Déduire des questions précédentes le signe de g(*x*) en fonction des valeurs de *x*.

Partie B: Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la définie sur R par : $f(x)=(x+2)e^x-x$

On note (C_f) la courbe représentative de *f* dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

(Unités graphiques : 4cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

b. Montrer que la droite (□□) d'équation $y=-x$ est asymptote la courbe (C_f) en $-\infty$.

c. Étudier, en fonction des valeurs de *x*, les positions relatives de (□□) et (C_f)

2. En remarquant que *f(x)* peut s'écrire $f(x)=e^x\left(x+2-\frac{x}{e^x}\right)$. déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

3. Vérifier que pour tout réel, on a $f'(x)=g(x)$

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\left(C_f\right)$ en son point A d'abscisse 0.

6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

7. Tracer, dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, la courbe $\left(C_f\right)$ la tangente (T) et l'asymptote (□□).

Partie C.

1. Soit *H* la fonction définie sur R par $H(x)=(x+1)e^x$.

Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de *f* sur R

2. Calculer en cm² , l'aire A comprise entre la courbe (C_f), l'axe des abscisses , la droite l'équation $x=-2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près.