Problème 1

Ce problème a pour but de montrer un exemple de courbes représentatives de deux fonctions qui sont asymptotes, puis de calculer une aire comprise entre deux courbes.

Partie A: Détermination d'une fonction

On considère la courbe représentative C ,d'une fonction g définie sur $]0;+\infty[$, dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm . Cette courbe est représentée sur le document fourni en annexe.
Les points d'intersection de C et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) et (3 ; 0).

1. Soient *a* et *b* deux nombres réels tels que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x}$.

   En utilisant les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses, déterminer les nombres *a* et *b*.

2. Montrer que g(x) peut s'écrire: $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction *h* définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$.

1. Étudier les variations de *h* et dresser son tableau de variations.
2. Calculer $h(1)$. En déduire que $h(x)$ est strictement positif pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$.

Partie C : Étude de fonction

On définit la fonction *f* par : $f(x) = x - 4 + \dfrac{1+2\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.On appellera Γ la courbe représentative de *f* dans le repère orthogonal du document 1.

1.
   a. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro.

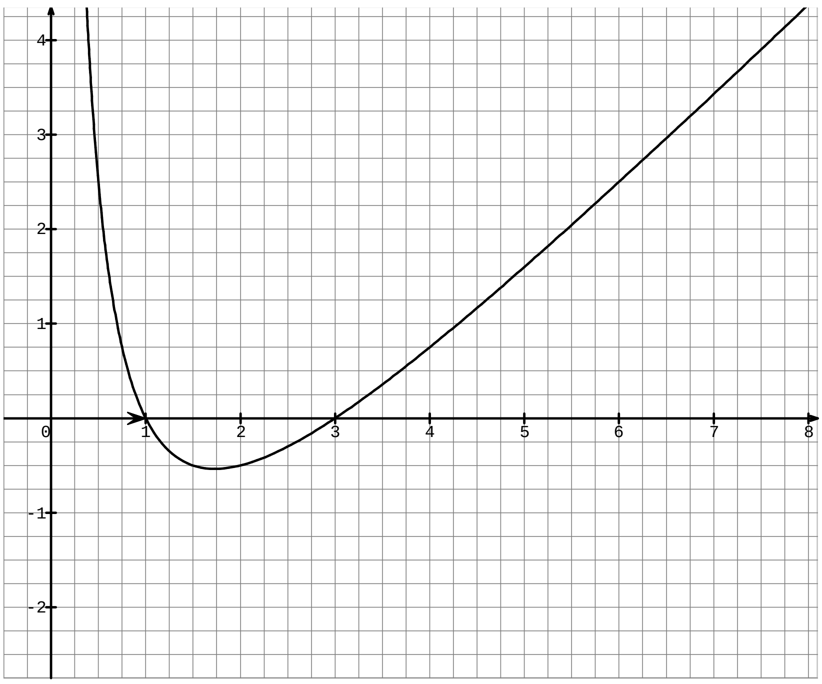
   b. En déduire que Γ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer la limite de *f* en $+\infty$.
3. pour tout x de $]0;+\infty[$ montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.En déduire le tableau de variations de *f*.
4. Courbes asymptotes. On rappelle que $g(x) = x - 4 + \dfrac{3}{x}$

   a. Calculer la limite en $+\infty$ de $k(x) = f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des courbes Γ et C .

   c. Sur $]0;+\infty[$ déterminer la position de la courbe Γ par rapport à la courbe C .
5. Construire la courbe Γ sur le document fourni en annexe et que l'on rendra avec la copie.



Partie D : Calcul d'une aire comprise entre deux courbes

1. Montrer que $f(x) - g(x)$ admet pour primitive sur $]0;+\infty[$ la fonction K définie par :

   $K(x) = (\ln x - 1)^2$
2. Sur le document fourni en annexe, hachurer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.
3. Calculer la valeur de cette aire en cm².