Fomesoutra.com
ça soutra !

Problème 2

Partie A: Etude d'une fonction auxiliaire.

La fonction g est somme de fonctions strictement croissantes sur I =]0;+∞[. Elle est donc elle-même strictement croissante sur cet intervalle. On peut aussi calculer sa dérivée et voir que celle-ci est strictement positive sur I. g(0,5) = –0,875 – ln(2) = –1,57 à 0,01 près par défaut
g(1) = 0 , valeur exacte .g(2) = 7 + ln(2) = 7,69 à 0,01 près par défaut g(e) = e^3 = 20,08 à 0,01 près par défaut. .Comme g est strictement croissante sur I et que g(1) = 0, on en déduit que g est <0 sur]0;1[et que g est > 0 sur]1;+ ∞[.

Partie B : Etude de *f*.

Le calcul de la dérivée de *f* est sans problème. $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}-x$; $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-x$; $f'(x)=\dfrac{1-\ln x-x^3}{x^2}$

On remarque alors que $f'x)=-\dfrac{g(x)}{x^2}$. $f'(x)$ et g(x) sont donc de signe contraires.

On forme alors le tableau de signes de f '(x) en utilisant le résultat de la question PartieA:3: puis le tableau de variations de f sur I. f est croissante sur]0;1] et décroissante sur [1;+∞[.

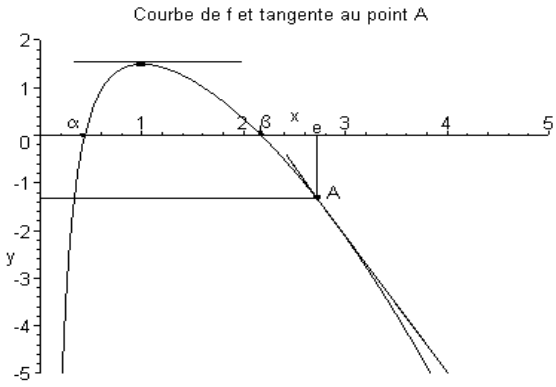
$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

D'après les variations de f sur I, on sait que f admet un maximum absolu en 1. C'est à dire que pour tout x dans I, $f(x) \le f(1)$. Or $f(1)$ = 1,5 donc pour tout x dans I, on a bien $f(x) \le 1{,}5$.A point de (C) d'abscisse e.

$f(e) = e^{-1} - 0{,}5e^2 + 2$ et $f'(e) = -e$.

Equation de la tangente en A : $y = -ex + 0{,}5e^2 + e^{-1} + 2$.



Partie C: Etude de "$f(x) = 0$, $x > 0$"

On peut remarquer que la courbe de f a deux point d'intersection avec l'axe des abscisses, d'où deux solutions pour l'équation "$f(x) = 0$".

On peut aussi s'appuyer sur les variations de f et remarquer que f est dérivable et strictement croissante sur]0;1[. Comme $f(1) > 0$ et que f tend vers $-\infty$ en 0, on en déduit que l'équation admet une unique solution entre 0 et 1. Même chose sur [1 ; +∞ [.

On a donc une solution notée a sur]0;1[et une solution notée b sur]1;+ ∞ [.

Les encadrements demandés se justifient par l'observation des signes de f(0,4358) , f(0,4359) , f(2,1712) et f(2,1713). D'après le tableau de variations de f (ou une simple observation de sa courbe), on peut dire que: $f(x) \le 0$ sur] 0; α] , $f(x) \ge 0$ sur [α ; β] , $f(x) \le$ 0 sur [β ; +∞ [.

Le calcul de la dérivée de F ne pose aucune difficulté .et on remarque que $F'(x) = f(x)$.

Comme on connaît le tableau de signes de f (x) , on connaît celui de la dérivée de F, donc on connait le tableau de variations de F sur]0;+ ∞ [.