Problème 3 cor

PARTIE A : Etude de fonction *f*

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+\ln x)=-\infty$ Il vient $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2+\ln x}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ .Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ alors l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C.

2)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$ $f(x)=\dfrac{x}{x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ soit $f(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

c) On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation x =1 comme asymptote au voisinage de $+\infty$ .voir courbe.

3)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{(1+\frac{1}{x})x-(x+2+\ln x)}{x^2}$ $f'(x)=\dfrac{x+1-x-2-\ln x}{x^2}$. $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$

b) $f'(x)\geq 0$ $\dfrac{-1-\ln x}{x^2}\geq 0$ *et* $x\in]0;+\infty[$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ $-1-\ln x\geq 0$ $\Leftrightarrow -\ln x\geq 1\Leftrightarrow \ln x\leq -1\Leftrightarrow x\leq e^{-1}$

$f'(x)\leq 0$ $\dfrac{-1-\ln x}{x^2}\leq 0$ *et* $x\in]0;+\infty[$ $\Leftrightarrow$ $x\geq e^{-1}$.

Donc $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=e^{-1}$

c) Il en résulte le tableau de variation de f :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$		$-\infty \nearrow 1+e \searrow$	1

PARTIE B :

1) g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x+2}{x}$

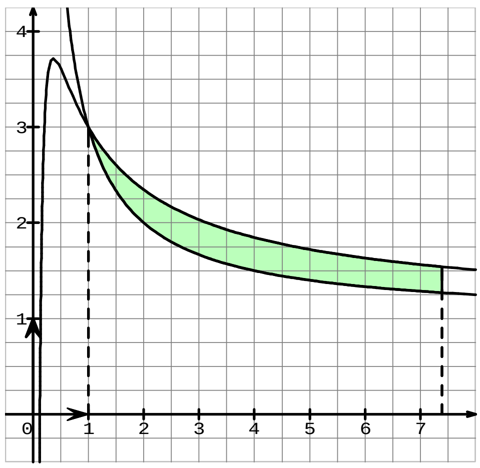
a) $g'(x)=\dfrac{x-(x+2)}{x^2}$; $g'(x)=\dfrac{-2}{x^2}$ Comme $g'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ alors la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$. Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		
$g(x)$		$+\infty \searrow$ 1

b) La courbe H admet comme asymptote l'axe des ordonnées et la droite D.

2)a) $f(x)-g(x)=\dfrac{x+2+\ln x-(x+2)}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x}$. Sur $]0;+\infty[$ $f(x)$-$g(x)$ est du signe de ln x. Donc $f(x)-g(x)\leq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 1$ et $f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.



b) Les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1, car $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

c) On en déduit que : C est au-dessous de H sur]0, 1] et C est au-dessus de H sur $[1;+\infty[$

3) Tableau des valeurs

PARTIE C : Calcul d'une aire

x	0, 5	1	2	2, 5	4	5
g(x)	5	3	2	1, 8	1, 5	1, 4

1) Soit U la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $U=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$;

$U'(x)=\dfrac{2}{2}\ln x\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$. Comme $U'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ alors U est une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

3) $A(\alpha)=8cm^2$. $2(\ln\alpha)^2=8$ $(\ln\alpha)^2=4$; $\ln\alpha=2$, car $\ln\alpha>0$ d'où $\alpha=e^2$