PROBLÈME 3

Dans tout le problème, le plan *P* est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+2+\ln x}{x}$

Partie A

1. Il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C . Le prouver par le calcul.
2. a) Vérifier que pour tout *x* de $]0;+\infty[$, $f(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$

   b) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

   c) En déduire l'existence d'une asymptote *D* à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la page 3. a)

Prouver que, pour tout x de $]0;+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1}.

c) Etablir le tableau de variation de *f*. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de *f*.

d) Tracer La courbe représentative C de la fonction *f* dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$

Partie B

1.Soit *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x+2}{x}$ et *H* la courbe représentative de *g* .

a) Etudier rapidement la fonction *g* sur $]0;+\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variation).

b) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H .

2. a) Calculer $f(x)-g(x)$ et étudier son signe.

   b) Montrer que les deux courbes C et *H* se coupent en un point *K* d'abscisse 1.

   c) Etudier la position relative des deux courbes C et H .

Placer le point *K* et construire la courbe *H* dans le repère précédent.

Partie C

1. Soit *u* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. Vérifier que *u* est une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$

   sur $]0;+\infty[$.

soit $A(\alpha)=4\left[u(\alpha)-u(1)\right]$. On note *A(α)* l'aire du domaine limité par les courbes C et H et par les droites d'équation $x=1$ et $x=\alpha$. Calculer $A(\alpha)$ en cm^2.

3. Résoudre l'équation $A(\alpha)= 8\ cm^2$. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique