***Problème 4***

PARTIE A

I - 1 - a) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$  b) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$

2 - Le signe de g(x) est donné par le tableau suivant :

| $x$ | 0 | 1 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Signe de $g(x)$ | ‖ + | 0 – | 0 + | |

II - 1 - $g(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$. On sait que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ or $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2}{x^2}$ soit $\lim_{x\to+\infty} g(x) = a$ donc a = 1

2 - g(1) = 0 et g(3) = 0. g(1) = 0 équivaut à 1 + b + c = 0 . g(3) = 0 équivaut à $\dfrac{9+3b+c}{9} = 0$

D'où le système de deux équations permettant d'obtenir b et c. $\begin{cases} b+c=-1 \\ 3b+c=-9 \end{cases}$

3 - La résolution du système donne b = – 4 et c = 3 d'où $g(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$

PARTIE B : Etude d'une fonction

I - Soit une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{3}{x} - 4\ln x + x$

1 - a) $f(x) = x(-\dfrac{3}{x^2} - 4\dfrac{\ln x}{x} + 1)$ ; $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x^2} = 0$ ; $\lim_{x\to+\infty} -4\times\dfrac{\ln x}{x} = 0$ ; $\lim_{x\to+\infty} (-\dfrac{3}{x^2} - 4\dfrac{\ln x}{x} + 1) = 1$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}(-3 - 4x\ln x + x^2)$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ ; $\lim_{x\to 0^+} (-3+4x\ln x + x^2) = -3$ D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

2 - a) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x} + 1$ ; il vient $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ Soit $f'(x) = g(x)$

b) On en déduit de la partie A le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | 0 | 1 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ + | 0 – | 0 + | |
| var $def$ | ‖ $-\infty$ ↗ | $f(1)$ ↘ | $f(3)$ ↗ | $+\infty$ |

c) $f'(1) = -2$  f(3) = 2– 4ln3

II .1

a) Comme la fonction f admet dans l'intervalle $]\,0\,;3\,]$ un maximum négatif , alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

b) Comme la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]\,3\,;10\,]$ et que $f(3)$ et $f(10)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x_0$ dans cet intervalle. $f(3) \approx -2.39$ et $f(10) \approx 0{,}49$

c) L'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution dans l'intervalle $]1\,0\,;+\infty\,]$ car $f$ est strictement croissante sur cet intervalle et $f(10) > 0$

2 - Tableau à compléter

| x | 9,15 | 9,16 | 9,17 | 9,18 | 9,19 | 9,20 | 9,21 | 9,22 | 9,23 | 9,24 | 9,25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –0,032 | –0,026 | –0,02 | –0,014 | –0,008 | –0,002 | 0,003 | 0,009 | 0,015 | 0,021 | 0,027 |

On en déduit un encadrement d'amplitude de $10^{-2}$ de $x_0$ donc $9{,}2 \le x_0 \le 9{,}21$

PARTIE C : Calcul d'aire

1 - $f(\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} - 4\ln\sqrt{3} + \sqrt{3}$  $f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - 4\times\dfrac{1}{2}\times\ln 3 + \sqrt{3}$ D'où $f(\sqrt{3}) = -2\ln 3$

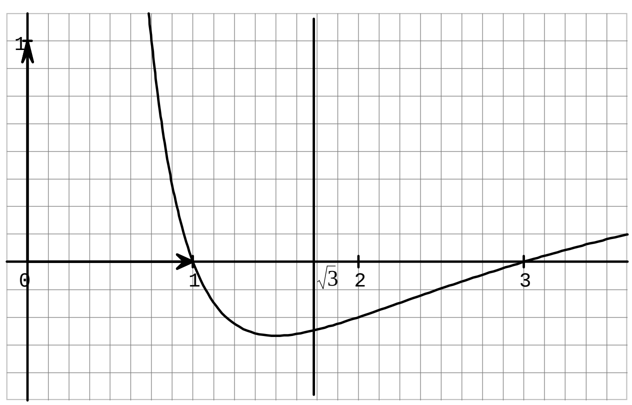
a) $A = -\int_1^3 g(x)dx = \int_3^1 g(x)dx$ ; $A = \left[f(x)\right]_3^1 = f(1) - f(3)$ A = ( –3 +1)–(–1–4ln3 +3)

A = –2–2 +4ln3 = – 4 +4 ln3 unités d'aire .

b) L'aire délimitée par les droites d'équations x = 1 et $x = \sqrt{3}$

$A = -\int_1^{\sqrt{3}} g(x)dx = \int_{\sqrt{3}}^1 g(x)dx = [f(x)]_{\sqrt{3}}^1 = f(1) - f(\sqrt{3})$

$A = (-3+1) - (-2\ln 3) = -2 + 2\ln 3$ unités d'aire



Donc la droite (L) d'équation $x = \sqrt{3}$ partage bien le domaine D en deux domaines d'aires égales.