PROBLEME 4

On considère la fonction g définie sur $]0.+\infty[$, dont la représentation graphique (C) obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure (1) ci-contre.

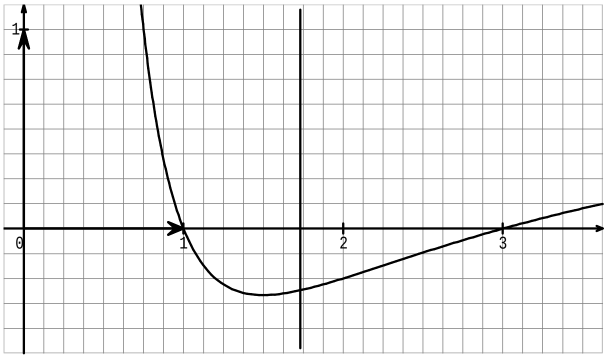
On précise que la courbe (C) ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite (Δ) qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes :

I - A partir de cette représentation graphique : Déterminer :

a) la limite de g(x) lorsque x tend vers 0,

b) la limite de g(x) lorsque x tend vers l'infini;

2 - Dresser un tableau donnant le signe de g(x) lorsque x décrit l'intervalle $]0.+\infty[$



II - On admet que $g(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ où a , b et c sont trois nombres réels.

1 - En calculant la limite de $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que a = 1.

2 - Lire g(1) et g(3) sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.

3 - Résoudre ce système et exprimer g(x) en remplaçant a, b et c par leur valeurs.

<u>PARTIE B :</u> Etude d'une fonction

I - On considère la fonction f définie sur $]0.+\infty[$ par $f(x)=-\dfrac{3}{x}-4\ln x+x$

1 - a) En mettant $\dfrac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de f(x), montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

b) En mettant $\dfrac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$

2 - a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ = g(x).

b) Utiliser les résultats de la partie A pour en déduire le tableau de variation de f.

c) Calculer les valeurs exactes de f (1) et f (3).

II - En utilisant le tableau de variation de f, justifier que l'équation $f(x) = 0$

1 - a) n'admet pas de solution dans l'intervalle] 0 ; 3] ,

b) admet une solution unique notée α, dans l'intervalle [3 ; 10] ,

c) n'admet pas de solution dans l'intervalle]10 ; $+\infty$ [,

2 - Compléter le tableau (document à rendre avec votre copie) et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

<u>Tableau à compléter</u>

x	9,15	9,16	9,17	9,18	9,19	9,20	9,21	9,22	9,23	9,24	9,25
f(x)											

On donnera les valeurs arrondies de $f(x)$ au millième près.

<u>PARTIE C :</u> Calcul d'aires

1- Montrer que $f(\sqrt{3})=-2\ln 3$ (détailler les calculs sur votre copie).

2- Le tracé de la courbe (C) représentant g dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donné sur la figure (2). (Document à rendre avec votre copie).

a) Soit D le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe (C) d'une part et les droites d'équations : $x=1$ et $x=3$ d'autre part.

Calculer la valeur exacte de son aire A exprimée en unités d'aires. (On rappelle que $g = f'$)

b) Tracer la droite (D) d'équation x = $\sqrt{3}$ et montrer qu'elle partage le domaine D en deux domaines d'aires égales.