problème 5

Partie A : Etude du signe de $x^3-1+2\ln x$

1. La fonction g est dérivable sur]0 ; + ∞[: $g'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x}$

donc la fonction g est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	
$g(x)$	‖ $-\infty$	0 ↗	$+\infty$

2. Tableau de variation de la fonction *g*.

3. $g(1)=1-1+2\ln 1=0$.

4. Si $x\le 1$, alors $g(x)\le g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x)\le 0$.

Si $x\ge 1$, alors $g(x)\ge g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x)\ge 0$.

conclusion : sur $]0;1]$, $g(x)\le 0$ et sur $[1;+\infty[$, $g(x)\ge 0$.

On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

x	1	1	$+\infty$
Signe de $g(x)$	‖ $-$	0	+

Partie B :

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1.a $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} x-1=-1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$ (<u>voir formulaire</u>) et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

De la dernière limite, on en déduit que la droite d'équation *x* = 0 est asymptote verticale à la courbe (C).

1.b $f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$;donc la droite (*D*) d'équation *y* = *x* – 1 est asymptote oblique à (*C*) au voisinage de $+\infty$ .Il y a une autre asymptote à la courbe(C) (voir 1.a.) ,c'est la droite d'équation *x* = 0.

1.c $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$; $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln x}{x^4}=1-\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=1-\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$;

$f'(x)=\dfrac{x^3-1+2\ln x}{x^3}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	+
$f(x)$	‖ ↘	0	↗

1.d *f* '(*x*) est du signe de g(*x*) car $x^3>0$ sur]0 ; + ∞[et le signe de g(*x*) a déjà été trouvé à la partie A : *f* (1) = 0

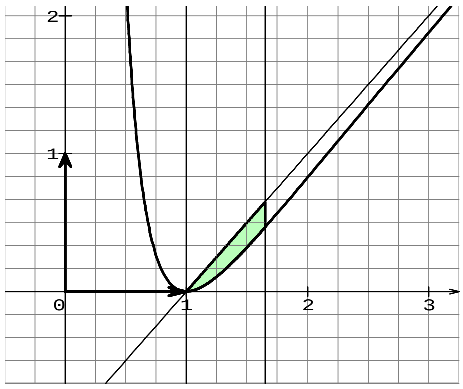
1.e Soit *x* l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote (*D*) et de la courbe (*C*) , on a : *f*(*x*) = *x* – 1 soit ln *x* = 0, par conséquent *x* = 1. l'ordonnée de ce point est *f*(1) = 0 .

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point de coordonnées (1 ; 0) . $f(x)-(x-1)$ est du signe de - ln *x* (voir Partie B 1 .b)

<u>Etudions le signe de – ln *x* :</u>

– ln *x* ≥0 si ln *x* ≤0 soit ln *x* ≤ ln 1 d'où *x* ≤1 sur]0 ; 1] , – ln *x* ≥0 donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D) sur [1 ;+ ∞[, – ln *x* ≤0 donc la courbe (C) est au dessous de la droite (D)

1.f voir graphique



2.a pour tout réel x on a :

$H'(x)=\dfrac{1}{x^2}(1+\ln x)-\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\ln x-1}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x^2}=h(x)$ donc H est une primitive de la fonction *h* définie sur]0 ; + ∞[

2.b Soit Δ le domaine plan limité par (*D*), (*C*) et les droites d'équation *x* = 1 et $x=\sqrt{e}$. Sur $\left[1;\sqrt{e}\right]$ la courbe (C) est au dessous de (D) donc l'aire du domaine Δ limité par (*D*), (*C*) et les droites d'équation : $x=1$ et $x=\sqrt{e}$ est en unité d'aire :

$$\int_1^{\sqrt{e}}[(x-1)-f(x)]dx=\int_1^{\sqrt{e}}h(x)dx=\left[H(x)\right]_1^{\sqrt{e}}=H(\sqrt{e})-H(1).$$

$$H(\sqrt{e})=\frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\ln\sqrt{e}\right)=\frac{-1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2}\ln e\right)=\frac{-3}{2\sqrt{e}}\quad H(1)=-(1+\ln 1)=-1,$$

donc $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}h(x)dx=\left(\frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\right)u.a=\left(\frac{-3}{2\sqrt{e}}+1\right)\times 6=6-\frac{-9}{\sqrt{e}}$ cm². on trouve en arrondissant au mm^2 : 0,54 cm².