Problème6

Le but du problème est d'étudier la position relative de deux courbes et de calculer l'aire du domaine plan compris entre ces dernières. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques 5cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

Sur la feuille réponse ci-jointe (cf. en dernière page), ont été tracées les courbes représentatives C et Γ respectivement des deux fonctions f et g , définies pour tout réel x de l'intervalle]0, 3], Par :

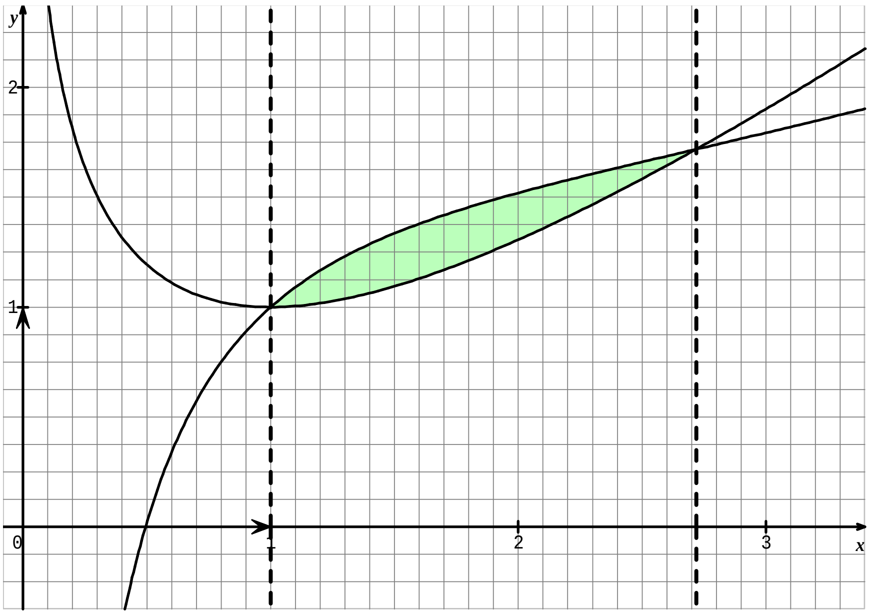
$$f(x) = x - \ln x \qquad \text{et} \qquad g(x) = x - (\ln x)^2$$

Partie 1 : Étude des fonctions f et g .

1. (a) Déterminer, en justifiant vos calculs, la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
   (b) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur] 0, 3].
   Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur] 0 , 3].
2. On désigne par g' la fonction dérivée de g sur] 0, 3]. Calculer $g'(x)$. En admettant que $(x - 2\ln x)$ est positif sur] 0 , 3] , en déduire que g est strictement croissante sur] 0 , 3].
3. Désigner sur la feuille-réponse *(cf. ci-dessous),* la courbe C et la courbe Γ .

Partie 2 : Position relative des deux courbes.

1. (a) Résoudre sur]0, 3], l'équation $g(x) = f(x)$.
   (b) En déduire les coordonnées des points d'intersection M et N des courbes C et Γ .
   Placer M et N sur la feuille-réponse.
2. (a) Résoudre sur]0, 3], l'inéquation $g(x) \geq f(x)$.
   (b) En déduire la position relative des courbes C et Γ sur l'intervalle [1 , e].



Partie 3: Calcul d'une aire.

On désigne par D l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :
$1 \leq x \leq e$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$
et par A son aire exprimée en cm^2.
On admet que, en unités d'aire,
on a: $\int_1^e (g(x) - f(x))dx$.

1. Hachurer D sur la feuille-réponse.
2. Soit la fonction H définie sur [1, e] par: $H(x) = -x(\ln x)^2 + 3x\ln x - 3x$.

a) Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction (g –f) sur [1, e].

b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de A.

c) En donner une valeur approchée au mm^2 près par excès.