

Problème 7

A- $g(x) = x^2 + 6 - 4\ln x$; $g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x}$; $g'(x) = \frac{2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x}$. Comme $x \in]0; +\infty[$ $\frac{2(x + \sqrt{2})}{x} > 0$

Donc le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $x - \sqrt{2}$,
d'où le tableau de variation

La fonction g admet un minimum égal à

$$g(\sqrt{2}) = 2 + 6 - 4\ln\sqrt{2} = 8 - 2\ln 2.$$

Par conséquent $g(x) > 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$g(\sqrt{2})$	

B- a) $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{4}) = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{\ln x}{x}) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{x}{4}) = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

On déduit que la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

c- $f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{x^2} + \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$; $f'(x) = \frac{x^2 + 2 + 4 - 4\ln x}{4x^2}$; $f'(x) = \frac{x^2 + 6 - 4\ln x}{4x^2}$ et $f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$.

d-Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ dépend du signe

de $g(x)$; or $g(x) = 8 - 2\ln 2 > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Il s'ensuit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et par conséquent

la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 7/4 +	
$f(x)$		$-\infty$	$+\infty$

2-a) Soit $h(x) = f(x) - y$; $h(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} - \frac{x}{4}$.

$$h(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} . \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) . \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{\ln x}{x}) = 0 . \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 .$$

On déduit que la droite est une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b- Trouver les coordonnées du point d'intersection des courbes D et C revient à résoudre l'équation $f(x) = y$

c'est-à-dire $f(x) - y = 0$ ou encore $h(x) = 0$. donc $\frac{-1 + 2\ln x}{2x} = 0$. $x \neq 0$ et $2\ln x - 1 = 0$.

$$\ln x = \frac{1}{2} \text{ équivaut à } \ln x = (1/2)\ln e = \ln e^{1/2} \text{ et } x = e^{1/2} = \sqrt{e} . y = f(e) = \frac{\sqrt{e}}{4} . A(\sqrt{e}; \frac{\sqrt{e}}{4}) .$$

c- Déterminer les positions relative de la courbe C par rapport à la droite D , revient à étudier le signe de

$$h(x) = f(x) - y, \text{ c'est-à-dire le signe de } \frac{2\ln x - 1}{x} \text{ sur}$$

l'intervalle $]0; +\infty[$, donc il faut étudier de $2\ln x - 1$.

$$2\ln x - 1 > 0 ; \ln x > 1/2 , \ln x > 1/2 = \ln e^{1/2} ,$$

donc $x > e^{1/2}$. On déduit donc que sur l'intervalle $]e^{1/2}; +\infty[$ la courbe C est au dessus de la droite D .

On démontre de même que sur l'intervalle $]0; e^{1/2}[$

la courbe C est en dessous de la droite D .

4- $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ avec $u = \ln x$.

Donc une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $\frac{1}{2}u(x)^2$

$$\text{Donc } H(x) = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$3- A = \left(\int_{\sqrt{e}}^e (f(x) - y) dx \right) \times u.a = 16 \times \left(\int_{\sqrt{e}}^e \left(-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx \right) A = 16 \times [H(e) - H(\sqrt{e})] . H(e) = -\frac{1}{2}\ln e + \frac{1}{2}(\ln e)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{et } H(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2}\ln \sqrt{e} + \frac{1}{2}(\ln \sqrt{e})^2 = -\frac{1}{4}\ln e + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} . \text{ On déduit que } A = 16 \times \left(0 - \left(-\frac{1}{8} \right) \right) = 16 \times \left(\frac{1}{8} \right) = 2 \text{ cm}^2 .$$

