

PROBLEME 7

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = -4\ln x + x^2 + 6$ (où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

- 1.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- b. Montrer que $g'(x) = 0$ sur I pour la seule valeur $x = \sqrt{2}$.
- c. Etudier le signe de $g'(x)$ sur I .
- d. montrer que le tableau de variation de la fonction g est donné par

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

2. a. Calculer la valeur exacte de $g(\sqrt{2})$.
- b. Montrer que g est fonction positive sur l'intervalle I
- c. Etudier les limites de $g(x)$ en 0 et en $+\infty$, et donner le tableau de variation complet de la fonction g .

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm .

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).
4. soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{x}{4}$. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - \frac{x}{4}$.
 - a. Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe C .
 - b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ
 - c. Etudier la position relative de C et Δ sur $]0; +\infty[$
5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f
 - b. Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$.
 - c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.
7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
8. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $[1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

à l'aide de la calculatrice et en justifiant votre réponse Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C :

Soit k la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $k(x) = (\ln x)^2$

1. On désigne par k' la fonction dérivée de la fonction k .
Calculer $k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. En déduire une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule quand x vaut 1.
3. Résoudre dans $\square$ l'équation $u(u+1) = 0$, et en déduire les solutions de $H(x) = 0$ dans l'intervalle I .
- 4/ On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$.
 - a. En remarquant que $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x).u(x)$, déterminer une primitive H de h .
 - b. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , la droite D et les droites d'équation $x = \sqrt{e}$ et $x = e$.
 - c. Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe C , la droite D et les droites d'équation $x = \sqrt{e}$ et $x = e$. Donner la valeur exacte.