Problème 9 Correction

Partie A

1. $g(x)=-2x^2-1+\ln x$, $g'(x)=-4x+\frac{1}{x}=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Sur]0 ; $+\infty$ [seul le terme $1-2x$ change de signe : positif avant 1/2, négatif après 1/2.

2.

x	0	1/2	$+\infty$
$g'(x)$	+		−
$g(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}-\ln 2$	$\searrow$

3. Le maximum de g est $-\frac{3}{2}-\ln 2$ donc $g(x)\le g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\ln 2<0$.

Partie B

1. a. $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$: $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$; or en 0 $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion, f tend vers $+\infty$. quand x tend vers 0 ; la droite x = 0 est asymptote de C.

b. On sait que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc f tend vers $-\infty$ car $-x+1$ tend vers $-\infty$.

c. $f(x)-(-x+1)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+x-1=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc la droite Δ : $y=-x+1$ est asymptote à la courbe

d. Lorsque $x>1$, $-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}<0$ car $\ln x>0$ .Donc sur $[1;+\infty[$ C est au-dessus de Δ ; sur $]0;1]$ C est en dessous de Δ.

2. a. b. c. $f'(x)=-1-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$. Donc f ’ est négative et f décroissante.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−		−
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

d. $f(1)$ = 0 : lorsque x est inférieur à 1, $f(x)>f(1)=0$ car f est décroissante. Lorsque x est supérieur à 1, $f(x)<f(1)=0$.

3. courbe

Partie C

1. $F'(x)=-\frac{1}{2}(2x)+1-\frac{1}{4}\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}=f(x)$: F est une primitive de f.

2. $I=\int_1^e f(x)\,dx=F(e)-F(1)=\left[-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{4}(\ln e)^2\right]-\left[-\frac{1}{2}1^2+1-\frac{1}{4}(\ln 1)^2\right]=-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{3}{4}\approx-1{,}726$.

3. b. L’unité d’aire est $1\text{ cm}\times 2\text{ cm}=2\text{ cm}^2$; on prend la valeur absolue de l’intégrale multipliée par l’unité d’aire, ce qui nous fait $e^2-2e+\frac{3}{2}$, soit environ 3,45 cm^2 au mm^2 près.

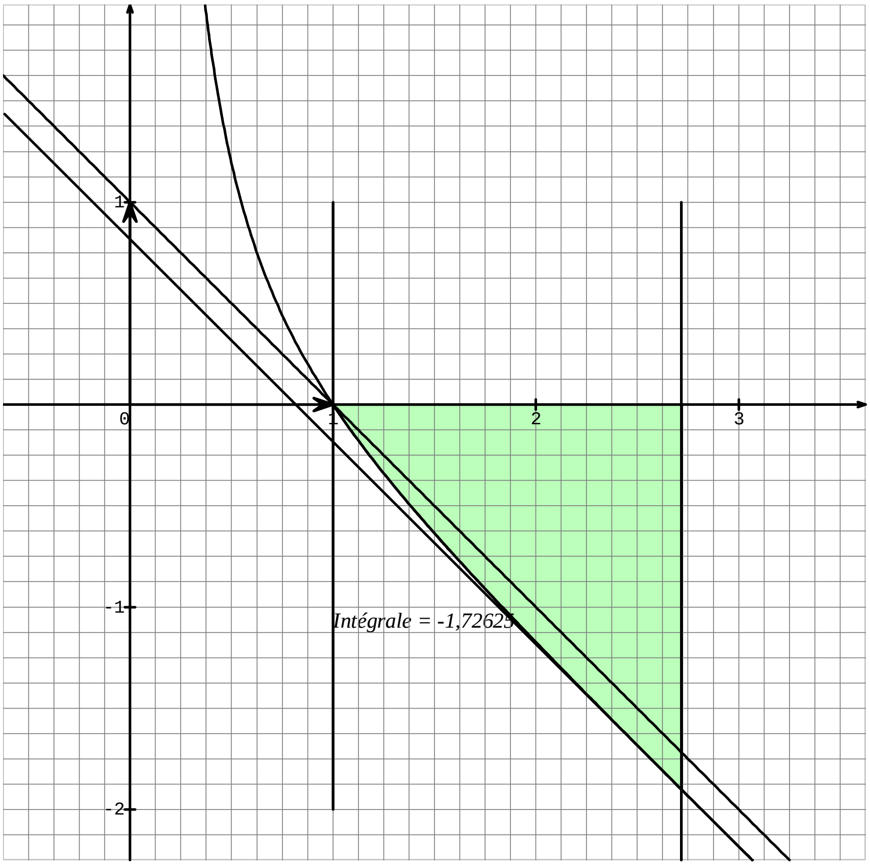
Partie D

1. Pour avoir une tangente parallèle à Δ, il faut trouver x tel que $f'(x)=-1$, soit $\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=-1$.

$\Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$ L’ordonnée est alors $f(e)=-e+1-\frac{1}{2e}$; l’équation de T est $y=-x+e-e+1-\frac{1}{2e}=-x+1-\frac{1}{2e}$.

2. a. Comme C est en dessous de Δ, on a $MN=(-x+1)-f(x)=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}=h(x)$.

b. $h'(x)=\frac{1}{2}\frac{1-\ln x}{x^2}$ qui change de signe en $x=e$; la distance MN est maximale lorsque M est en J et cette distance vaut $h(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$.



0
1
2
3
1
-1
-2
Intégrale = -1,72625