Problème 9

Partie A On considère la fonction g définie sur] 0 ; $+\infty$ [par $g(x)=-2x^2-1+\ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de]0 ; $+\infty$ [. Étudier son signe sur] 0 ; $+\infty$ [.
2. Dresser le tableau de variations de g sur]0 ; $+\infty$ [. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).
3. En déduire que pour tout x de]0 ; $+\infty$ [, $g(x)<0$.

Partie B Soit f la fonction définie sur] 0 ; $+\infty$ [par $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   c. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=-x+1$ est asymptote à la courbe C.
   d. Étudier la position relative de C et Δ sur]0 ; $+\infty$ [.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$. Vérifier que pour tout x de]0 ; $+\infty$ [, $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$.
   c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur]0 ; $+\infty$ [.
   d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur]0 ; $+\infty$ [.
3. Dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C.

Partie C

1. Vérifier que la fonction F définie sur]0 ; $+\infty$ [par $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f.
2. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire en cm^2,de la partie E, puis en donner la valeur arrondie au mm^2 près.

Partie D

1. Résoudre l'équation $f'(x)=-1$
   En déduire l'existence d'une unique tangente T à C parallèle à Δ, préciser les coordonnées du point de contact J et l'équation de cette tangente T . Tracer T dans le repère précédent.
2. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. M et N sont les points d'abscisse x situés respectivement sur C et sur Δ.
   a. Préciser, en fonction de x, la valeur de la distance MN.
   b. Etudier sur [1 ; $+\infty$ [les variations de la fonction h définie sur [1 ; $+\infty$ [par $h(x)=\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}$.
   c. Déduire des questions précédentes que la distance MN est maximale lorsque M est en J et préciser la valeur de cette distance maximale.