

Problème 10 cor

La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x + \ln x$.

- $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x + \ln x = 0 \Leftrightarrow x(-1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \ln x = 0$ puisque $x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow -x + \ln x > 0 \Leftrightarrow x(-1 + \ln x) > 0 \Leftrightarrow -1 + \ln x > 0$ puisque $x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

PARTIE II

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$

- $f(x) = x^2(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x) = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{3}{4}x^2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^2 \ln x = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x + x \ln x + \frac{1}{2}x$$

$$f'(x) = -x + x \ln x$$

- d'où $f'(x) = g(x)$. $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

$$3. f(e^{3/2}) = -\frac{3}{4}e^3 + \frac{1}{2}e^3 \ln e^{3/2} \quad f(e^{3/2}) = -\frac{3}{4}e^3 + \frac{3}{4}e^3 = 0$$

$$\text{d'où : } f(e^{3/2}) = 0$$

- L'équation de la tangente (T) en A à la courbe (G) est :
 $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ avec $f(1) = -3/4$ et $f'(1) = -1$. On a donc : $y + 3/4 = -(-x - 1)$ $y = -x + 1 + 3/4$ $y = -x + 1/4$

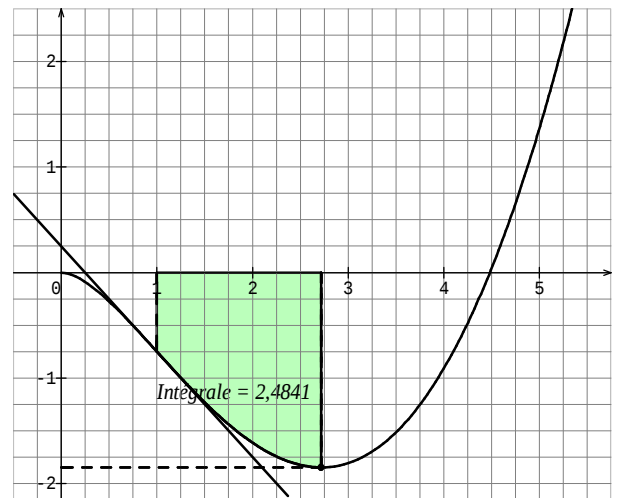
5. Tableau de valeurs :

x	0,5	1	2	3	4	5	6
f(x)	-0,27	-0,75	-1,6	-1,8	-0,9	1,4	5,2

Voir courbe ci-contre :

$$6.a. F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3. \text{ Pour montrer que F est une}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(e) = -\frac{1}{4}e^2$	$+\infty$



primitive de f sur $]0;+\infty[$, il suffit de montrer que $F'(x) = f(x)$.

$$\text{On a : } F'(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{11}{12}x^2 ; F'(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{12}x^2 ; F'(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2.$$

Donc F est bien une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

- $-\int_1^e f(x)dx$ car G est située en dessous de l'axe des abscisses

$$[-F(x)]_1^e = F(1) - F(e) = -\frac{11}{36} - \left(\frac{1}{6}e^3 - \frac{11}{36}e^3 \right) = \frac{5e^3 - 11}{36} \times 4 = \frac{5e^3 - 11}{9} \text{ cm}^2 = 9,94 \text{ cm}^2 \text{ à } 0.01 \text{ près.}$$