Problème 12

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

1. $g'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $x>0$ et $1+2x>0$.

Donc, $g'(x)$ est du signe de $1-2x$ sur $]0;+\infty[$. Or, $1-2x>0$ si $x<\frac{1}{2}$. D'où : $g'(x)$ est positive si x appartient à l'intervalle $]0;1/2[$ et $g'(x)$ est négative si x appartient à l'intervalle $]1/2;+\infty[$

On en déduit alors que la fonction g est croissante sur $]0;1/2[$ et décroissante sur $]1/2;+\infty[$.

Tableau de variations de la fonction **g :**

$g(1/2)=\ln(1/2)-2\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\ln 2-3/2$

x	0	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$-\ln 2-3/2$	$\searrow$

2. De la question précédente, en on déduit que la fonction g admet un maximum atteint en $1/2$ et ce maximum est strictement négatif.
On en déduit alors que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : Etude d'une fonction f

1. a) Limite de f en $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc par soustraction des limites on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(1-2x-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$.

D'où $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

1. b) Limite de f en 0 :

$\lim_{x\to0^+}(1-2x)=1$ $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to0^+}\ln x=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, D'où, par addition des limites, on en conclut que : $\lim_{x\to0^+}\left(1-2x-\frac{\ln x}{x}\right)=1-(-\infty)=+\infty$. D'où $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

2. a) Montrons que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$:

On a : $f(x)-(1-2x)=-\frac{\ln x}{x}$. Or, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Donc : $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(f(x)-(1-2x)\right)=0$. On en déduit alors que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2. b) Position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$:

Etudions le signe de $f(x)-(1-2x)$, c'est-à-dire le signe de $-\frac{\ln x}{x}$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $x>0$. $-\frac{\ln x}{x}$ est donc du signe de $-\ln x$ sur $]0;+\infty[$.

Or, $\ln x\geq 0$ si $x\geq 1$; et $\ln x\leq 0$ si $0<x\leq 1$. Donc : $f(x)-(1-2x)\geq 0$ si $0<x\leq 1$ et $f(x)-(1-2x)\leq 0$ si $x\geq 1$

D'où : $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ sur $]0;1]$ et $\mathcal{C}$ est en-dessous de la droite $\mathcal{D}$ sur $[1;+\infty[$

3. a) Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=-2-\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{-2x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

3. b) Signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$; $x^2>0$. $f'(x)$ est donc du signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

Or, d'après la question A.2, on sait que $g(x)$ est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On en conclut que $f'(x)$ est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$		$+\infty \searrow -\infty$

4. cf graphique

Partie C : Calcul d'une aire

1. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1}{2}\times 2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x}$

2. a) cf graphique

2. b) Sur [1; e], la droite D est au-dessus de la courbe C, on a donc :

$$A=\left(\int_1^e \left(y-f(x)\right)dx\right)\times u.a=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\left[h(x)\right]_1^e\times u.a=\left(h(e)-h(1)\right)\times u.a=\left(\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)u.a=\frac{1}{2}\times 2^2=2cm^2$$