problème 13

A 1. $\lim_{x\to 0}(1+\ln x)=1-\lim_{x\to 0}(\ln x)=1-\infty=-\infty$; $\lim_{x\to 0}\frac{(1+\ln x)}{x}=\lim_{x\to 0}(1+\ln x)\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=(-\infty)\times+\infty=-\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$. on peut en déduire en passant que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ .On peut en déduire que la droite d'équation $y=0$ est asymptote en $+\infty$

2. a. f est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel $x\in]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{(1/x)\times x-1\times(1+\ln x)}{x^2}=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

2.b. f '(x) est du signe de $-\ln x$ car $x^2>0$ sur]0 ; + ∞ [$-\ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 0$ si et seulement si 0 < x <1. on en déduit que sur l'intervalle]0 ; 1] , f '(x) >0 donc f croissante sur l'intervalle [1 ; + ∞ [, f '(x) < 0 donc f décroissante .

x	0		1		+∞
$f'(x)$	‖	+	0	–	
$f(x)$	‖	↗	1	↘	
	‖	−∞			0

2. **c .** $f(1)=\frac{1+\ln 1}{1}=1$

Partie B **:**

1. Le point M_1 a pour ordonnées 0 donc son abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 :

$f(x)=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=1/e$

2. a. coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_2 : $f'\left(1/\sqrt{e}\right)=\frac{-\ln\left(1/\sqrt{e}\right)}{\left(1/\sqrt{e}\right)^2}=\frac{\ln\left(\sqrt{e}\right)}{1/e}=\frac{e}{2}$.

ordonnée du point au point d'abscisse x_2 : $f\left(1/\sqrt{e}\right)=\frac{1+\ln\left(1/\sqrt{e}\right)}{1/\sqrt{e}}=\frac{1-1/2}{1/\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{2}\Leftrightarrow x_2=\frac{\sqrt{e}}{2}$.

T : $y=f'\left(1/\sqrt{e}\right)\left(x-1/\sqrt{e}\right)+f\left(1/\sqrt{e}\right)=(e/2)\frac{e}{2}\left(x-1/\sqrt{e}\right)+1/\sqrt{e}=(e/2)x-1/\sqrt{e}+1/\sqrt{e}=(e/2)x$

La tangente T_2 au point M_2 a pour équation : $y=\frac{e}{2}x$.

b. c'est bien l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.

3. la tangente au point M_3 d'abscisse x_3 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc $f'(x_3)=0$ on en déduit $x_3=1$et M_3 (1 ; 1)

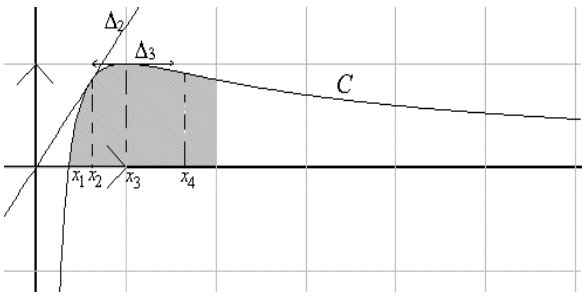
4. $f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$. $f''(x)=\frac{(-1/x)\times x^2+2x\times(1+\ln x)}{x^4}=\frac{x-2\ln x}{x^3}=-\frac{2\ln x-1}{x^3}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{2\ln x-1}{x^3}=0\Leftrightarrow 2\ln x-1\Leftrightarrow\ln x^2=\ln e\Leftrightarrow x_4=\sqrt{e}$

5. $x_1=1/e$; $x_2=\frac{\sqrt{e}}{2}$; $x_3=1$ et $x_4=\sqrt{e}$. $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_4}{x_3}=\sqrt{e}$

Donc x_1, x_2, x_3 , x_4 sont les quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$.

$A=\int_{1/e}^{2} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{1/e}^{2}=F(2)-F(1/e)$



6. $=\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\left(\ln(1/e)+\frac{1}{2}(\ln(1/e))^2\right)$

$=\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\left(-1+\frac{1}{2}\right)$

$A=\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2+\frac{1}{2}$

Partie C :

1. g est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel x de]0 ; + ∞ [on a : $g(x)=(\ln x)^2$ $g'(x)=2\frac{\ln x}{x}$.

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$ $F(x)=\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$