Problème 13

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm)

Partie A : Etude de la fonction *f*.

1. Etudier les limites de *f* en 0 et en + ∞ (pour cette dernière on pourra remarquer que : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$)

2. a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$ pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$

b. En déduire le sens de variation de *f* . Dresser le tableau de variation de *f*.

Partie B : Etude de quelques points particuliers de C

1. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection M_1 de C avec l'axe des abscisses.

2. Soit $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. On note M_2 le point de C d'abscisse x_2.

Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point M_2. vérifier que Δ_2 passe par O.

3. Indiquer l'abscisse x_3 du point M_3 de C tel que la tangente Δ_3 à C en M_3 soit parallèle à l'axe des abscisses.

4. Soit *f* '' la fonction dérivée de *f* ' : calculer *f* ''(x) pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Déterminer le réel x_4 qui annule *f* ''(x) . On appelle M_4 le point de C d'abscisse x_4.

5. Vérifier que x_1, x_2, x_3 , x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.

6. Placer les points M_1, M_2, M_3 , M_4 dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Construire les tangentes Δ_2 et Δ_3 puis la courbe C.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=(\ln x)^2$. Calculer la dérivée de *g*.

En déduire une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$,après avoir remarqué que : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$

2. Hachurer le domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\dfrac{1}{e}$ et x = 2. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².