Problème 14 cor

A. Etude d'une fonction auxiliaire

1) $g(x) = x^2 + 1 - 2\ln x, \quad x \in \mathbb{R}^{*+}; \quad g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$

si $x \in]0; 1]$ alors $g'(x) < 0$, d'où le tableau de variation

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $g(x) > 2$ d'où $g(x) > 0$

B. Etude de f et tracé de la courbe C.

1) a) $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C.

c) $f'(x) = \frac{\left(2x - \frac{2}{x}\right)x - (x^2 + 1 + 2\ln x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - 2\ln x}{x^2} = \frac{g'(x)}{x^2}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

2) a) $f(x) - x = \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. donc la droite

d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C lorsque x tend vers $+\infty$

b) $f(x) = x$ si et seulement si $\frac{1 + 2\ln x}{x} = 0$. $x \in \mathbb{R}^{*+}$ si et seulement si $\ln x = -1/2$ si et seulement si

$x = e^{-1/2}$ c) Si $x > e^{-1/2}$ alors $f(x) - x > 0$ donc si $x \in]0; e^{-1/2}[$ alors C est au dessous de Δ .

3) a) $x_B = 1$.

L'équation de la tangente T en B sera $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. $y - 2 = 2(x - 1)$. $y = 2x$

b) Le coefficient directeur de T' doit être égal à 1.

On cherche à résoudre $f'(x) = 1$ soit $\frac{x^2 + 1 - 2\ln x}{x^2} = 1$ $x \in \mathbb{R}^{*+}$ d'où $1 - 2\ln x = 0$. $\ln x = \frac{1}{2}$; $x = e^{1/2}$

4) a) $f(e) = \frac{e^2 + 1 + 2}{e} = \frac{e^2 + 3}{e}$

b) $x_A = e^{-1/2}$, $x_A = e^0 = 1$, $x_A = e^{1/2}$, $x_A = e$ Suite géométrique de raison $q = e^{1/2}$

C. 1) $H(x) = (\ln x)^2$. $H'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2\ln x}{x} = h(x)$

2) Soit $I = \int_{\sqrt{e}}^e (f(x) - x) dx = \int_{\sqrt{e}}^e \left(\frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x}\right) dx = \left[\ln x + (\ln x)^2\right]_{\sqrt{e}}^e = \ln e + (\ln e)^2 - \ln e^{-1/2} - (\ln e^{-1/2})^2 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

L'unité d'aire = 4 cm^2 donc l'aire cherchée est 9 cm^2 .