Problème 14

Le but du problème est d'étudier la fonction *f* définie sur $]0.+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+1+2\ln x}{x}$ .On note **C** sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

A. ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

On introduit la fonction g définie sur $]0.+\infty[$ par $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) Etudier les variations de g (on ne demande pas la recherche de limites).

2) En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0.+\infty[$.

B. ETUDE DE *f* ET TRACE DE LA COURBE C.

1)a) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de *f* en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe **C**.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout *x* de $]0.+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$

2) a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe **C**.

b) Déterminer l'abscisse x_A du point A, intersection de la courbe **C** et de la droite Δ

c) Etudier la position relative de **C** et Δ.

3) a) Déterminer la tangente T à C au point d'abscisse $x_B=1$.

b) Déterminer l'abscisse x_C du point où la courbe admet une tangente T' parallèle à la droite Δ.

4)a) Calculer l'ordonnée du point D de C d'abscisse $x_D=e$.

b) Montrer que les abscisses x_A , x_B , x_C et x_D des points A, B, C et D sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Placer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points A, B, C et D. Tracer les droites Δ, T, T' puis la courbe **C**.

C. CALCUL D'UNE AIRE

1) Calculer la dérivé h de la fonction H définie sur $]0.+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.

2) Calculer en cm2, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, la droite D et les droites d'équation $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et x = e.