

Problème 15cor

1.a. On a $g(2) = 0$.

b. T est tangente à C au point d'abscisse 2 donc $g'(2)$ est égal au coefficient directeur de T.

Graphiquement on lit ce coefficient : $\frac{3}{2}$ donc $g'(2) = \frac{3}{2}$.

c. Si D est asymptote à C lorsque x tend vers $+\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

d. On obtient graphiquement : si $x \in]1; 2[$ alors $g(x) < 0$; si $x \in [2; +\infty[$ alors $g(x) \geq 0$. D'où

2.a. $g_1(2) = 1 - \frac{1}{2-1} = 0$ $g_2(2) = 1 - \frac{2}{4-2} = 0$.

$g_3(2) = \ln(2-1) = 0$. On ne peut donc éliminer aucune fonction.

x	1	2	$+\infty$
Signe de $g(x)$		-	0 +

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = +\infty$. On peut donc éliminer la fonction g_3 .

c. $g_1'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, donc $g_1'(2) = \frac{1}{2-1} = 1$ $g_2'(x) = \frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2}$ $g_2'(2) = \frac{2(4-1)}{(4-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Il s'agit donc de la fonction g_2 .

Partie B

1.a. $f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1)$ $x \in]1; +\infty[$. On sait que : $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ donc $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. donc la droite $x=1$ est asymptote verticale à la courbe.

2.a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x-1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x-1} = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Si $x \in]1; +\infty[$ alors $x-1 > 0$, $x > 1$ et $x > x-1 > 0$ donc $\frac{x}{x-1} > 1$; si $\frac{x}{x-1} > 1$ alors $\ln \frac{x}{x-1} > 0$

donc $\ln \frac{x}{x-1} > 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$. et par conséquent C est

au dessus de Δ pour tout $x \in]1; +\infty[$

3.a. $f'(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{(x-1)}$ $f'(x) = 1 + \frac{2(x-1) - 2x}{x(x-1)}$, donc

$f'(x) = 1 - \frac{2}{x(x-1)} = g_2(x)$.

b. On a vu précédemment le signe de g_2 . On a donc:

Partie C

1. On a $H'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - [\ln(x-1) + (x-1) \times \frac{1}{x-1}]$. $H'(x) = \ln x + 1 - [\ln(x-1) + 1]$;

$H'(x) = \ln x + 1 - \ln(x-1) - 1$ $H'(x) = \ln x - \ln(x-1) = h(x)$. Donc H est une primitive de h sur $]1; +\infty[$.

2.a. voir graphique

b. $A = \left(\int_2^3 (f(x) - (x+1)) dx \right) u.a = \left(\int_2^3 2\ln \frac{x}{x-1} dx \right) u.a = \left(\int_2^3 h(x) dx \right) u.a$

$A = [h(x)]_2^3$ $A = 2[(3\ln 3 - 2\ln 2) - 2\ln 2]$ et $A = 2[3\ln 3 - 4\ln 2] u.a = 1,08 u.a$.

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$		$+\infty$	$3 + 2\ln 2$ $\rightarrow +\infty$