Problème 15

Partie A

On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique (*C*) d'une fonction *g* définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$ ainsi que deux droites (*T*) et (*D*). La droite (*T*) passe par les points de coordonnées respectives $(2;0)$ et $(0;-3)$. La droite (*D*) a pour équation $y=1$.

1.a. Déterminer graphiquement *g* (2).

b. Sachant que la droite (*T*) est tangente à la courbe (*C*) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement *g'* (2).

c. On admet que la droite (*D*) est asymptote à la courbe (*C*). Déterminer graphiquement la limite de *g* (x) quand x tend vers + ∞ .

d. Sachant que la courbe (*C*) coupe l'axe des abscisses en un seul point. Etudier graphiquement le signe de la fonction *g* sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2. On définit les fonctions g_1, g_2, g_3 sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$g_1(x)=1-\frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x)=1-\frac{2}{x^2-x} \quad \text{et} \quad g_3(x)=\ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction *g* que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer g_1 (2), g_2 (2), g_3 (2). Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$. Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g'_1 et g'_2 les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2. Calculer $g'_1(2)$, $g'_2(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$.

On note (C_f). la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

1.a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, $f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$?

b. Déterminer la limite de *f* en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f).?

2.a. Déterminer la limite de *f* en + ∞ .

b. Justifiez que la droite (Δ) d'équation *y* = *x* + 1 est asymptote oblique à la courbe (C_f).

c. Montrer que pour tout *x* de l'intervalle $]1;+\infty[$, $\frac{x}{x-1}>1$. Quel est alors le signe de $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$?

d. En déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ).

3.a. Déterminer la fonction dérivée *f '* de la fonction *f* et vérifier que, pour tout *x* appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, *f '* (*x*) = *g* (*x*) où *g* est la fonction trouvée dans la partie A.

b. à l'aide des résultats graphiques obtenus dans la partie A, dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

Partie C

1°/Montrer que, sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la fonction H définie par :H(*x*) = *x* ln *x* – (*x* – 1) ln (*x* – 1) est une primitive de la fonction *h* définie par *h*(x) = ln *x* – ln (*x* – 1) sur cet intervalle.

2.a. Construire la courbe (C_f), la droite (Δ) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (Δ), la courbe (C_f) et les droites d'équation *x* = 2 et *x* = 3.

b. On désigne par A la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de A puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.