

Problème : 17

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$

1. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$, pour $x \in]0; +\infty[$; $2x^2 + 1 > 0$ et

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$\frac{1}{x} > 0$, donc $g'(x) > 0$. on en déduit que la fonction g est croissante (strictement) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$

en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(1) = 0$ on en déduit le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	+

Partie B

1. $f'(x) = a - \frac{1 - \ln x}{x^2}$

2. La courbe C passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, $f(1) = 0$

et $f'(1) = 0$ soit : $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b - \frac{\ln 1}{1} = a + b = 0$; $f'(1) = a - \frac{1 - \ln 1}{1^2} = a - 1 = 0$

Donc $a = 1$ et $b = -1$ et enfin $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

Partie C : Etude de la fonction f .

1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. a. $f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b. $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$, on en déduit les variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

c. 0 est le minimum absolue de la fonction f sur son ensemble de définition on $f(x) \geq 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a. $f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b. Etudions le signe de $f(x) - (x - 1)$ d'après a. il est du signe de $-\ln x$ soit :

$-\ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 0$ ou encore $\ln x < \ln 1$ soit $x < 1$:

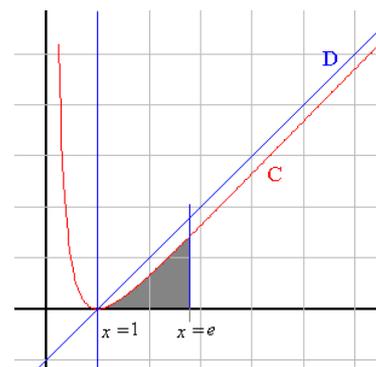
si $x < 1$ alors $f(x) - (x - 1) > 0$ donc sur l'intervalle $]0; 1[$, la courbe C est au dessus de l'asymptote D .

si $x > 1$ alors $f(x) - (x - 1) < 0$ donc sur l'intervalle $]1; +\infty[$, la courbe C est au dessous de l'asymptote D .

Si $x = 1$, la courbe C et la droite D se coupent en un point de coordonnées $(1; 0)$

c.

Partie D : Calcul d'aire



1. a. $H(x) = (\ln x)^2$: $H = u^2$ avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$, $H' = 2u'u$ et on a : $H'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

b. une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

2. a. b.

$$S = \int_1^e f(x) dx = [F(x)]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \right) \right] = \left(\frac{e^2}{2} - e \right) u.a$$

$$1u.a = 4cm^2 \Rightarrow A = 4 \left(\frac{e^2}{2} - e \right) = (2e^2 - 4e) cm^2.$$