Problème 17

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On s'intéresse dans ce problème à une fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan P.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

On désigne par *g*' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calculer g(1) et en déduire l'étude du signe de g(x) pour *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles *a* et *b* telles que, pour tout nombre réel *x* appartenant à $]0;+\infty[$,

$f(x)=ax+b-\dfrac{\ln x}{x}$. on désigne par *f* ' la fonction dérivée de la fonction *f*.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Sachant que la courbe $\boldsymbol{C_f}$ passe par le point de coordonnées (1; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres *a* et *b*.

Partie C : Etude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

1. a. Déterminer la limite de la fonction *f* en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
   b. Etablir le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. En déduire le signe de *f*(*x*) pour *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. On considère la droite D d'équation $y=x-1$.
   a. Justifier que la droite D est asymptote à la courbe $\boldsymbol{C_f}$.
   b. Etudier les positions relatives de la courbe $\boldsymbol{C_f}$ et de la droite D.
   c. Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe $\boldsymbol{C_f}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $H(x)=(\ln x)^2$.
   On désigne par H ' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer H'(x) pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. Calculer A. Donner la valeur de A , arrondie au mm².