Problème 18

Partie A . Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, par : $f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x$.

On note $\boldsymbol{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées (1 ; –3).

Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe $\boldsymbol{C}_f$ passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, par : $f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe $\boldsymbol{C}_f$?
2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, on a $f(x) = x\left(x - \dfrac{4}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée $f\,'$ de la fonction f .Vérifier que $f\,'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.
4. Étudier le signe de la fonction $f\,'$ sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.
6. Tracer la courbe $\boldsymbol{C}_f$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par : $H(x) = x\ln x - x$.

1. Calculer $H\,'(x)$ où $H\,'$ désigne la fonction dérivée de *H*. En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
2. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe $\boldsymbol{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

   Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm².