

Correction problème 19

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 8\ln x + 8$

1.a la fonction g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}.$$

b. pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ et $x+2 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ dépend uniquement de $x-2$.

On déduit que $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$ et $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ sur l'intervalle $]0; 2[$.

D'où le tableau de variation :

2. $g(2) = 2^2 - 8\ln 2 + 8 = 4 - 8\ln 2 + 8 = 12 - 8\ln 2 \approx 6,45$
à 10^{-2} près. La fonction g admet un minimum égal à $g(2) > 0$. Donc $g(x) > 0$.

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$\swarrow$ $g(2)$ $\searrow$	

Partie B

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8\ln x}{x}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8\ln x}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{8\ln x}{x} = x - 3 + 8\frac{\ln x}{x}.$$

2.a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-3) = -3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \times \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 8 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 8 \times 0 = 0$ (vu formulaire),
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. vu que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, on déduit que la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C
au voisinage de 0.

3.a. la fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{\left(2x - 3 + \frac{8}{x}\right) \times x - (x^2 - 3x + 8\ln x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 8 - x^2 + 3x - 8\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 8 - 8\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après la partie A, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

c.

4. Soit D la droite $y = x - 3$.

a. soit $d(x) = f(x) - y = x - 3 + \frac{8\ln x}{x} - (x - 3) = \frac{8\ln x}{x}$. or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 8 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 8 \times 0 = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$. On déduit que la droite D d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b. Soit A le point d'intersection de C et la droite D : $A \in C \cap D \Leftrightarrow f(x) = y$

$$\text{donc } x - 3 + 8\frac{\ln x}{x} = x - 3 \Leftrightarrow 8\frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } A \in D \Leftrightarrow y = x_A - 3 = 1 - 3 = -2.$$

Donc le point A a pour coordonnées $(1; -2)$.

c. la position relative de C et D dépend du signe de $d(x) = f(x) - y = \frac{8\ln x}{x}$, or $x > 0$,

or $\ln x < 0$ sur $]0; 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$. On déduit que :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Sur $]0;1[$: $\frac{8 \ln x}{x} < 0$, donc la courbe C est en dessous de la droite D ($d(x) = f(x) - y < 0$).

sur $]1;+\infty[$: $\frac{8 \ln x}{x} > 0$, donc la courbe C est au dessus de la droite D . ($d(x) = f(x) - y > 0$).

d. l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est définie par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\text{or } f'(1) = \frac{1^2 + 8 - 8 \ln 1}{1^2} = 9 \text{ et } f(1) = \frac{1^2 - 3 + 8 \ln 1}{1} = -2, \text{ donc } y = 9(x-1) - 2 = 9x - 11$$

5. courbe

Partie C

1. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

a. sur $]0;+\infty[$, $H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$, $H(x) = \frac{1}{2}u^2$,

$$H' = \frac{1}{2}2u'u \text{ avec } u = \ln x \text{ et } u' = \frac{1}{x}. \text{ Donc}$$

$$H'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{\ln x}{x} \text{ et par conséquent}$$

$H(x)$ est une primitive
de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

b. sur $]0;+\infty[$, on a : $f(x) = x - 3 + \frac{8 \ln x}{x}$, donc

d'après la question précédente on

$$\text{obtient : } F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 8 \times \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

2. a voir graphique ci-dessus

b. sur l'intervalle $[1;5]$, la courbe C est au dessus de la droite D , donc $d(x) = f(x) - y > 0$

$$\text{donc l'aire de la partie du plan hachurée est } A = \left(\int_1^5 (f(x) - y) dx \right) \times u.a$$

$$A = \left(\int_1^5 8h(x) dx \right) \times u.a = 8 \left(\int_1^5 h(x) dx \right) u.a = 8 [H(x)]_1^5 \times u.a = 8 \times \frac{1}{2} \left((\ln 5)^2 - (\ln 1)^2 \right) u.a = 4 (\ln 5)^2 u.a.$$

$$\text{Or } 1 u.a = 1 \text{ cm}^2. \text{ Donc } A = 4 (\ln 5)^2 \text{ cm}^2 \approx 10,36 \text{ cm}^2$$

