

PROBLÈME 19

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 8\ln x + 8$.

1. a. Calculer $g'(x)$.
- b. Étudier le signe de $g'(x)$.
- c. Dresser le tableau de variations de g (l'étude des limites de g n'est pas demandée).
2. Donner une valeur approchée de $g(2)$ à 10^{-2} près, en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : étude et représentation graphique d'une fonction

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overset{1}{i}, \overset{1}{j})$, unité graphique 1 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8\ln x}{x}$ et C sa représentation graphique dans le repère $(O; \overset{1}{i}, \overset{1}{j})$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]0; +\infty[$ on a : $f(x) = x - 3 + \frac{8\ln x}{x}$.
2. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de $f(x)$.
b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C , et en donner une équation.
3. a. Déterminer la dérivée f' de f sur $]0; +\infty[$.
b. Vérifier que pour tout réel x de $]0; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
c. Dresser le tableau de variations de f .
4. Soit D la droite d'équation $y = x - 3$.
a. Montrer que D est asymptote à C en $+\infty$.
b. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de C et de D .
c. Étudier la position relative de C et de D .
5. Tracer dans le repère $(O; \overset{1}{i}, \overset{1}{j})$ la courbe C et la droite D .

Partie C : calcul d'une aire

1. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.
a. Vérifier qu'une primitive de h sur $]0; +\infty[$ est la fonction H définie par $H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.
b. En déduire une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
2. a. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C et la droite D , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.
b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan hachurée ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.