

## Problème 20

### Partie A .

$$1. g(x) = x^2 - 2\ln(x) + 4 \quad . \quad g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x} = 2 \frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$$2. \text{ sur l'intervalle I } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{(x+1)(x-1)}{x} \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1, \text{ puisque } 2 \frac{(x+1)}{x} > 0 \text{ sur l'intervalle I.}$$

|         |   |       |           |
|---------|---|-------|-----------|
| $x$     | 0 | 1     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |   | - 0 + |           |
| $g(x)$  |   | ↘ 3 ↗ |           |

3. la fonction  $g$  admet un minimum strictement positive égal à 3 atteint en  $x=1$ , par conséquent  $g(x) > 0$  .

### Partie B

$$1.a. f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)-1}{x} . \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x)-1}{x} \right) .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 1/2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x)-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x)-1) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty , \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty .$$

$$1.b. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} \right) .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0 \text{ (voir formulaire) , donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$2.a\&b. f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{(1/x) \times x - 1 \times (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 4 - 2\ln(x)}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

On sait que  $g(x) > 0$  sur l'intervalle I , par conséquent  $f'(x) > 0$  sur l'intervalle I et la fonction  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle .

$$c. f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ln(1)-1}{1} = 1 - 1 = 0 , \text{ donc } f(x) < 0 \text{ sur } ]0;1[ \text{ et } f(x) > 0 \text{ sur } ]1;+\infty[$$

3. voir graphique

### Partie C

$$1. F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}[\ln(x)-1]^2 . \quad F(x) = \frac{2}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{x} (\ln x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{(\ln(x)-1)}{x} = f(x)$$

Et on déduit que la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle I.

2. voir graphique.

$$3. A = 4[F(e) - F(1)] \text{ représente}$$

l'aire de la partie hachurée sur

l'intervalle  $[1;e]$ .



