

Problème -20

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln(x) + 4$ et dont la représentation graphique est donnée ci-après.

1. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle I . Montrer que $g'(x) = 2\frac{x^2 - 1}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de g sur I

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur I .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I , par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C) .

b. Etudier la limite de f en $+\infty$ en remarquant que $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$.

2. On note f' la dérivée de f

a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

b. En utilisant la partie A donner le signe de $f'(x)$.

En déduire que la fonction f est croissante sur I .

c. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur I .

3. Construire sur une feuille de papier millimétré, la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en prenant comme unité graphique 2 cm ..

Partie C

On considère la fonction F , définie et dérivable sur l'intervalle I , d'expression :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}[\ln(x) - 1]^2.$$

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f définie à la partie B

2. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite (Δ) d'équation $x = e$.

Hachurer la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et délimitée par (C) et (Δ) .

3. Que représente le nombre $A = 4[F(e) - F(1)]$.

Calculer la valeur exacte de A , puis sa valeur arrondie au centième.