Problème 22

A.1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

$f(1)=1$; $f'(1)=1$ puisque le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal à 1

$f'(2)=0$, puisque la tangente au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses

2. $f(x)=a\ln x+bx+\frac{c}{x}$; $f'(x)=\frac{a}{x}+b-\frac{c}{x^2}$.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c

$f(1)=a\ln 1+b\times 1+\frac{c}{1}=b+c$; $f'(1)=\frac{a}{1}+b-\frac{c}{1^2}=a+b-c$. $f'(2)=\frac{a}{2}+b-\frac{c}{2^2}=\frac{a}{2}+b-\frac{c}{4}=\frac{2a+4b-c}{4}$.

4. $f(1)=1\Leftrightarrow b+c=1$; $f'(1)=1\Leftrightarrow a+b-c=1$ $f'(2)=0\Leftrightarrow\frac{2a+4b-c}{4}=0\Leftrightarrow 2a+4b-c=0$ et on obtient

le système $\begin{cases}b+c=1\\a+b-c=1\\2a+4b-c=0\end{cases}$. $\begin{cases}b+c=1\\a+b-c=1\\2a+4b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=2 & \times 2\\2a+5b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-3\\a=2-2b=2-2(-3)=2+6=8\\c=1-b=1-(-3)=1+3=4\end{cases}$.

5. $f(x)=8\ln x-3x+\frac{4}{x}$

B. 1. $f(x)=x\left(8\frac{\ln x}{x}-3+\frac{4}{x^2}\right)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8\frac{\ln x}{x}-3+\frac{4}{x^2}\right)=-3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-3x^2=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\ln x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(8x\ln x-3x^2+4\right)=4$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

3. a. $f'(x)=\frac{8}{x}-3-\frac{4}{x^2}=\frac{8x-3x^2-4}{x^2}$, or $(3x-2)(2-x)=6x-3x^2-4+2x=-3x^2+8x-4$,donc $f'(x)=\frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

x	0		$2/3$		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$0{,}76$	↗	$1{,}54$	↘	$-\infty$

b. La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, elle est aussi strictement décroissante sur l'intervalle $[4;5]\subset[2;+\infty[$, or $f(4)\approx 0,09$ et $f(5)\approx -1,324$ de plus $0\in[f(4);f(5)]$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha)=0$ et $\alpha\in[4;5]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a : $f(4,07)=0,0019$ et $f(4,08)\approx -0,01$, donc $4,07<\alpha<4,08$.

C.1. $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\frac{3}{2}x^2$:

$F'(x)=8\ln x+\frac{(8x+4)}{x}-8-3x=8\ln x+8+\frac{4}{x}-8-3x=8\ln x-3x+\frac{4}{x}=f(x)$,par conséquent $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. $A=\left(\int_1^3 f(x)dx\right)u.a=4\times\left[F(x)\right]_1^3=4\left[F(3)-F(1)\right]$

$F(3)=(8\times 3+4)\ln 3-8\times 3-\frac{3}{2}\times 9=28\ln 3-\frac{75}{2}$ et $F(3)=(8\times 1+4)\ln 1-8-\frac{3}{2}=0-\frac{19}{2}$

$A=4\left[28\ln 3-\frac{75}{2}+\frac{19}{2}\right]=4\left[28\ln 3-\frac{56}{2}\right]=4\left(28\ln 3-28\right)cm^2\approx 11,05cm^2$