

PROBLÈME 22

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = a \ln x + bx + \frac{c}{x}$ où a, b et c sont trois nombres réels à déterminer. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

On a représenté la fonction f sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On note C la courbe représentative de cette fonction f .

On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère. La tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A : Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x et des nombres réels a, b et c .
3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c .
4. En utilisant les réponses aux questions 1. et 3., montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions

$$\text{du système } S \text{ suivant : } \begin{cases} b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \\ 2a + 4b - c = 0 \end{cases}$$

5. Résoudre le système S . En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; \infty[$ par : $f(x) = 8 \ln x - 3x + \frac{4}{x}$

1. Déterminer par calculs la limite de f en $+\infty$ (on peut factoriser $f(x)$ par x).
2. On rappelle que : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. En écrivant $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \frac{1}{x} (8x \ln x - 3x^2 + 4)$, déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; \infty[$: $f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$
 - a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)
 - b. Montrer que, sur l'intervalle $[4; 5]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée α .
 - c. Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-2} suivant : $4,07 < \alpha < 4,08$.

Partie C : calcul d'une aire

1. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = (8x + 4) \ln x - 8x - \frac{3}{2}x^2$.

Calculer $F'(x)$ et en déduire une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

2. a. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
 - b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan hachurée ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

