

CORRIGE

Exercice 1

1. $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$. Le son perd 10 % de son intensité, cela se traduit
 ar $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$. $u_2 = u_1 - \frac{10}{100}u_1 = u_1 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_1 = 0,9 \times 0,9u_0 = (0,9)^2 u_0$.
 $u_3 = u_2 - \frac{10}{100}u_2 = u_2 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_2 = (0,9)^3 u_0$

2. En raisonnant comme à la première question, sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de l'intensité u_n à u_{n+1} : $u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = u_n \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_n = 0,9u_n$; $u_{n+1} = 0,9u_n$.

La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$. son premier terme est u_0 . Le cours donne

la formule générale $u_{n+1} = qu_n = q^{n+1}u_0$, donc on a : $u_n = q^n u_0 = (0,9)^n u_0$ pour tout entier naturel n .

3. c. Déterminons le signe de la différence $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - u_n = -0,1u_n$

Tous les termes u_n , $n \in \mathbb{N}$, sont positifs donc la différence est négative : $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Remarque : Tous les termes u_n , $n \in \mathbb{N}$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0,9u_n}{u_n} = 0,9 < 1 \text{ pour } n > 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}$$

l'intensité du son devient inférieure à 1 dB quand $u_n = (0,9)^n u_0 < 1 \Rightarrow (0,9)^n < \frac{1}{100} = 0,01$

$$\Rightarrow \ln(0,9)^n < \ln(0,01) \Rightarrow n \ln(0,9) < \ln(0,01) \Rightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9)} \text{ puisque } \ln(0,9) < 0 ; n \approx 43,709 \text{ soit } n = 44.$$

Exercice 2 :

Le rayon lumineux perd 23 % de son intensité, cela se traduit par : $I_1 = I_0 - \frac{23}{100}I_0 = I_0 \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_0$

2.a En raisonnant comme à la première question, sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de

l'intensité I_{n-1} à I_n : $I_n = I_{n-1} - \frac{23}{100}I_{n-1} = I_{n-1} \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_{n-1}$; $I_n = 0,77I_{n-1}$.

b. La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique.

La suite (I_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,77$. son premier terme est I_0 .

Le cours donne la formule générale $I_n = qI_{n-1} = q^n I_0$.

c. Déterminons le signe de la différence $I_n - I_{n-1}$: $I_n - I_{n-1} = 0,77I_{n-1} - I_{n-1} = -0,23I_{n-1}$.

Tous les termes I_n , $n \in \mathbb{N}$, sont positifs donc la différence est négative : $I_n - I_{n-1} \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (I_n) est donc décroissante.

Remarque : Tous les termes I_n , $n \in \mathbb{N}$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{0,77I_{n-1}}{I_{n-1}} = 0,77 < 1 \text{ pour } n > 0. \text{ La suite } (I_n) \text{ est donc décroissante.}$$

3. l'intensité obtenue après la traversée de 4 plaques est égale à 15 d'où $I_4 = 15 \Leftrightarrow (0,77)^4 I_0 = 15$

$$I_4 = 15 \Leftrightarrow I_0 = \frac{15}{(0,77)^4} \approx 42,67.$$

4. l'intensité sortante étant inférieure ou égale au quart de son intensité rentrante, cela se traduit par l'inéquation $I_n \leq \frac{1}{4} I_0$, où n est l'inconnue à déterminer. Cette inéquation peut s'écrire :

$$(0,77)^n I_0 \leq 0,25 I_0, \text{ après simplification par } I_0, \text{ on obtient : } (0,77)^n \leq 0,25 ; \ln(0,77)^n \leq \ln(0,25)$$

$$n \ln(0,77) \leq \ln(0,25) ; \ln(0,77) < 0 \text{ d'où : } n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,77)} \approx 5,3 \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ donc } n = 6. \text{ Il faudra au minimum}$$

6 plaques pour que l'intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de l'intensité rentrante.

Exercice 3

1. $P_0 = 1013$. P_1 est la pression atmosphérique à la hauteur 100 m. P_1 a diminué de 1,25% par rapport à P_0 .

$$P_1 = P_0 - \frac{1,25}{100} P_0 = 1013 \times (1 - \frac{1,25}{100}) = 1000. \text{ De même } P_2 = P_1 - \frac{1,25}{100} P_1 = 1000(1 - \frac{1,25}{100}) = 988$$

2. a) La pression P_{n+1} diminue de 1,25% par rapport à P_n donc $P_{n+1} = P_n - \frac{1,25}{100} P_n = P_n(1 - \frac{1,25}{100}) = 0,9875 P_n$

b) On en déduit que (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9875$ et de premier terme $P_0 = 1013$.

c) On en déduit que $P_n = P_0 q^n$; $P_n = 1013 \times 0,9875^n$.

3. $3200 = 100 \times 32$ donc la pression atmosphérique à l'altitude 3200 m est donnée par $P_{32} = 1013 \times 0,9875^{32}$
 $P_{32} = 677$ La pression est de 677 hectopascal.

$$4. P_n \leq 600 ; 1013 \times 0,9875^n \leq 600 ; 0,9875^n \leq \frac{600}{1013} ; \ln(0,9875^n) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right) ;$$

$$n \ln(0,9875) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right) ; n \geq \ln\left(\frac{600}{1013}\right) / \ln(0,9875) \text{ car } \ln(0,9875) \leq 0. n \geq 41,6 \text{ soit à partir de}$$

$n = 42$. A partir de $42 \times 100 = 4200 \text{ m}$, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal

Exercice 4

1.a. $(E): y' + 2y = 0 : y = ce^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0) = 1$. On a donc $1 = ce^0 = c$ soit $c = 1$. D'où $f(x) = e^{-2x}$.

$$2.a. \text{ La valeur moyenne de } f \text{ sur } [0;10] \text{ est : } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx ; \mu = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} e^{-2x} dx = \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{10} = \frac{1}{20} [1 - e^{-20}]$$

$$2.b. \mu = \frac{1}{n+1-n} \int_n^{n+1} e^{-2x} dx ; \mu = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_n^{n+1} ; \mu = \frac{-1}{2} [e^{-2(n+1)} - e^{-2n}] ; \mu = \frac{1}{2} [e^{-2n} - e^{-2(n+1)}] . \mu = \frac{1}{2} e^{-2n} (1 - e^{-2})$$

$$3. u_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n},$$

$$3.a. u_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) ; u_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2} ; u_2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-4} \text{ et } u_3 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-6}$$

3.b. Pour montrer que (u_n) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul

que tel que $u_{n+1} = qu_n$. $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(n+1)}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n} \times e^{-2}$;

$u_{n+1} = u_n \times e^{-2}$. Donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})$ et de raison e^{-2}

3.c $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On a donc

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2}) \times \frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}.$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2} \times (1-e^{-2(n+1)}) \text{ .donc } S_9 = \frac{1}{2} \times (1-e^{-20}) \text{ et } \mu = \frac{S_9}{10}.$$

Exercice 5

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

1) Quand une valeur diminue de 2 %, elle est multipliée par 0,98. $u_1 = u_0 - 0,2u_0 = 0,98u_0 = 0,98 \times 20 = 19,6 \text{ mm}$

$$u_2 = u_1 - 0,2u_1 = 0,98u_1 = 0,98 \times 19,6 = 19,21 \text{ mm} \text{ . } u_3 = 0,98 u_2 = 0,98 \times 19,21 = 18,83 \text{ mm}.$$

2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98, il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison $q = 0,98$.

3) $u_n = u_0 \times q^n = 20 \times (0,98)^n$.

4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes : $u_{10} = 20 \times (0,98)^{10} = 16,34 \text{ mm}$

5) On cherche n tel que $u_n \leq 14$ $20 \times (0,98)^n \leq 14$ $20 \times (0,98)^n \leq 14 \Leftrightarrow 0,98^n \leq \frac{14}{20} = 0,7 \Leftrightarrow n \geq 18$

$$(\text{ En utilisant les touches } y = (0,98)^x) \ln(0,98)^n \leq \ln(0,7) \Leftrightarrow n \ln(0,98) \leq \ln(0,7) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,98)} \geq 18$$

donc $n \geq 18$, il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm ce qui donne comme le temps minimal pour que la pièce soit terminée :

$$18 \times 6 = 108 \text{ s} = 1 \text{ minutes et } 48 \text{ secondes}.$$

Exercice 6

Partie A

1. $u_0 = 15000$. $u_1 = u_0 + 15000 = 245000$ €. Le chiffre d'affaires u_1 en 1991 était de 245 000 €

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n .

u_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + $n + 1$, on a : $u_{n+1} = u_n + 15000$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $a = 15000$ et de premier terme $u_0 = 230\,000$

3. 2006 correspond au 16^{ème} rang donc

$$u_{16} = u_0 + 16a = 230000 + 16 \times 15000 = 230000 + 240000 = 470000 \text{ €}.$$

le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A est donc de 470 000 €

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre

d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. $v_0 = 150000$. $v_1 = v_0 \times 1,074 = 161100$. Le chiffre d'affaires v_1 en 1991 était de 161100 €

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n . v_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + $n + 1$, on a : $v_{n+1} = v_n \times 1,074$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $b = 1,074$ et de premier terme $v_0 = 150\,000$

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B. $v_{16} = v_0 \times (q)^{16} = 150000 \times (1,074)^{16} = 470067$ €

Partie C

1. On constate que les chiffres d'affaire des deux entreprises A et B en 2006 sont sensiblement les même malgré le chiffre d'affaire plus conséquent de l'entreprise A en 1990.

2. $u_{31} = u_0 + 31a = 230000 + 31 \times 15000 = 695000$ €, donc $2 \times u_{31} = 1390000$ €

$v_{31} = v_0 \times (q)^{31} = 150000 \times (1,074)^{31} = 1371589$, on est pas loin du double en effet.

Exercice 7

1. On note u_n la quantité de liquide, exprimée en cl, présente dans la bouteille au bout de n jours.

Ainsi, $u_0 = 75$.

a. $u_1 = u_0 - u_0 \times \frac{5}{100} = u_0 (1 - 0,05) = 0,95u_0 = 75 \times 0,95 = 71,25$ et

$u_2 = u_1 - u_1 \times \frac{5}{100} = u_1 (1 - 0,05) = 0,95u_1 = 71,25 \times 0,95 = 67,6875$.

b. $u_{n+1} = u_n - u_n \times \frac{5}{100} = 0,95u_n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? la suite (u_n) est une suite géométrique

de premier terme $u_0 = 75$ et de raison $q = 0,95$ et pour tout nombre entier n , $u_n = 75 \times (0,95)^n$.

c. Calculer la quantité de liquide restant dans la bouteille au bout de sept jours (on donnera le résultat arrondi au dixième). $u_7 = 75 \times (0,95)^7 = 52,3753$

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer le nombre minimum de jours nécessaires pour que la bouteille contienne moins de 25 cl.

$75 \times (0,95)^n = 25 \Leftrightarrow (0,95)^n = \frac{25}{75} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = \frac{\ln(1/3)}{\ln(0,95)} \approx 21,418$, il faut 22 jours pour que la bouteille

contienne moins de 25 cl. (on pourra aussi en classe de première utiliser la calculatrice en entrant $y = (0,95)^x$ et regarder dans le tableau de valeurs (on voit pour $x = 22$ la bonne réponse)

$x = 21 \rightarrow y = 0,34056 > 1/3$ et $x = 22 \rightarrow y \approx 0,32353 < 1/3$.