LYCEE SCIENTIFIQUE
YAMOUSSOUKRO

ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022
DUREE : 4h

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Terminale C

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2.

EXERCICE 1

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	Une isométrie du plan qui laisse invariant deux points A et B distincts est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
2.	Soit (u_n) une suite numérique dont le terme général vérifie : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique. Si (u_n) converge vers l alors $f(l) = l$.
3.	1 admet n racines $n^{-ième}$ telles que : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0;1;2;\cdots;n-1\})$.
4.	Soit (v_n) la suite géométrique de 1^{er} terme $v_0 \in \mathbb{R}^*$ et de raison $q (q \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\})$. Si $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est strictement décroissante.

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés à trou du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé à trou		Réponses
1.	Si ABC est un triangle équilatéral de sens direct et B' est le milieu de $[AC]$. Alors $r_{(B,\frac{2\pi}{3})} \circ r_{(C,\frac{2\pi}{3})}$ est ...	A	la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$.
		B	la rotation $r_{(B',\frac{4\pi}{3})}$.
		C	La rotation $r_{(A,-\frac{2\pi}{3})}$.
		D	l'application identique.
2.	La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \sin(\pi n)$ ...	A	n'admet pas de limite .
		B	converge vers 0.
		C	diverge vers $+\infty$.
		D	diverge vers $-\infty$.
3.	Le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie : $2\|z-i\| = \|z-\overline{z}+2i\|$ est ...	A	une droite.
		B	une demi-droite.
		C	un cercle.
		D	une parabole.
4.	Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \ln(e^{v_n}+1) \end{cases}$ (v_n) est une suite ...	A	géométrique de raison 1.
		B	arithmétique de raison 1.
		C	qui n'est ni géométrique, ni arithmétique.
		D	constante.

EXERCICE 3

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+i)\, z_n \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Démontrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme .
2) Démontre que $arg(z_n) \equiv \dfrac{n\pi}{4}\,[2\pi]$.
3) a) Déduis-en une condition nécessaire et suffisante pour que M_n appartienne à l'axe des réels.
   b) Détermine le lieu géométrique des points M'_{n+1} lorsque M_n décrit le cercle trigonométrique.
4) Démontre que pour tout entier naturel n, les triangles OM_nM_{n+1} sont rectangles en M_{n+1}.
5) On pose : $I_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$
   a) Calcule I_n en fonction de n.
   b) Détermine la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4

Soit ABC triangle rectangle en A tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. On note O le milieu de $[BC]$.

1) Démontre qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = O$ et $f(C) = B$
2) a) Démontre que f est une symétrie glissée.
   b) Détermine ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$. On note $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ les dérivées successives de f.

1) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$.
2) On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(n)}(0)}{k!}$.
   a) Justifie que $\forall p \geq 1, \dfrac{p-1}{p!} = \dfrac{1}{(p-1)!} - \dfrac{1}{p!}$.
   b) Déduis-en que $S_n = 1 - \dfrac{1}{n!}$ puis calcule la limite de S_n, quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 6

Une entreprise achète un véhicule à un coût de 30.000.000 F. Ce véhicule se déprécie de 20 % par an. Pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 3 % par an. L'entreprise prévoit remplacer ce véhicule dans 5 ans en le revendant à un employé si la différence du prix d'achat du nouveau véhicule et le prix de revente de l'ancien véhicule n'excède pas 25.000.000 F.
Ton père est employé dans cette société et désire acquérir le véhicule au bout de 5 ans si son prix n'excède pas les 25.000.000 F. Il se demande si la société acceptera de lui céder ce véhicule. Il te sollicite pour savoir s'il peut l'acheter.
En utilisant tes connaissances mathématiques, donne-lui une réponse argumentée.