LYCEE SCIENTIFIQUE ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

TERMINALE C

Durée :3h

EXERCICE 1

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	Pour tout entier n de la forme $7k+5$, n^3+1 est divisible par 7.
2.	a et b sont des entiers naturels non nuls tels que $a=15b-17$; le reste dans la division euclidienne de a par 15 est 13.
3.	Si le quotient dans la division euclidienne d'un entier a par 6 est 5 et le quotient dans la division euclidienne d'un entier b par 6 est 1 alors $a+b$ est multiple de 6.

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés à trou du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé à trou	Réponses	
1.	Dans la congruence modulo 5, 23512^4 est congru à ...	A	2 .
		B	17.
		C	1.
		D	8.
2.	L'équation $x^3-13x^2-5x+7\equiv 0[3]$ a pour solution dans $\mathbb{Z}$, ...	A	les entiers de la forme $6k$.
		B	les entiers de la forme $3k+2$.
		C	les entiers de la forme $3k+1$.
		D	$\varnothing$.
3.	Soient a et b deux entiers et m un entier naturel non nul. Si $ab\equiv 0[m]$, alors : ...	A	au moins l'un des deux entiers est nul.
		B	a et b sont divisibles par m.
		C	$a\equiv 0[m]$ ou $b\equiv 0[m]$.
		D	ab est divisible par m.

EXERCICE 3

1) a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n, le reste dans la division euclidienne de 7^n par 9.

b) Démontre alors que $2005^{2005}\equiv 7[9]$.

2) a) Démontre que pour tout entier naturel non nul n : $10^n \equiv 1[9]$.

b) On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ces chiffres.
Démontre la relation suivante : $N \equiv S[9]$.

c) En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.

3) On suppose que $A = 2005^{2005}$.
On désigne par :
— B la somme des chiffres de A;
— C la somme des chiffres de B;
— D la somme des chiffres de C.

a) Démontre la relation suivante : $A \equiv D[9]$.

b) Sachant que $2\,005 < 10\,000$ et que le nombre de chiffres n d'un entier p est $1 + E(\log p)$, démontre que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leq 72\,180$.

c) Démontre que $C \leq 45$.

d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, détermine un majorant de D plus petit que 15.

e) En déduire la valeur de D.

On rappelle que $\log 10^r = r$***, pour tout nombre rationnel*** r.

EXERCICE 4

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-1;0]$ par : $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2-1}}$.

1) a) Etudie la dérivabilité de g à gauche en 0.

b) On suppose que g est dérivable sur $]-1;0[$.
Montre que pour tout $x \in]-1;0[$, $g'(x) = \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)\sqrt{2x(x^2-1)}}$.

c) Déduis-en la variation de g.

2) On admet que g réalise une bijection de $]-1;0]$ vers $[0;+\infty[$.
Détermine l'expression explicite de la bijection réciproque g^{-1} de g.

3) On rappelle que pour tout nombre réel α tel que $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ soit définie, on a : $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$ avec $t = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

a) Justifie que pour tout $x \in]-\dfrac{\pi}{2};0]$, $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \in]-1;0]$

b) Justifie que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2};0], g\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{-\tan x}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2};0]$ par : $f(x) = \sqrt{-\tan x}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère .

1. a) Calcule la limite de f à droite en $-\frac{\pi}{2}$.

   b) Etudie la dérivabilité de f à gauche en 0 puis interpréte graphiquement le résultat.

2. On admet que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};0[$.

   a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2};0[$.

   b) Détermine une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $-\frac{\pi}{4}$.

3. On admet que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};0]$ vers $[0;+\infty[$.On note h sa bijection réciproque.

   a) Justifie que h est dérivable en 1 et calcule $(h)'(1)$.

   b) Justifie que h est dérivable sur $]0;+\infty[$et que $h'(x) = -\frac{2x}{1+x^4}$.

4. On considère la fonction ψ définie sur $]0;+\infty[$ par $\psi(x) = h(x) + h(\frac{1}{x})$.

   a) Calcule $\psi'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

   b) Déduis-en que ψ est une constante puis donne sa valeur.

LYCEE SCIENTIFIQUE
YAMOUSSOUKRO

ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022
DUREE : 4h

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Terminale C

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2.

EXERCICE 1

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	Une isométrie du plan qui laisse invariant deux points A et B distincts est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
2.	Soit (u_n) une suite numérique dont le terme général vérifie : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique. Si (u_n) converge vers l alors $f(l) = l$.
3.	1 admet n racines $n^{-ième}$ telles que : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0;1;2;\cdots;n-1\})$.
4.	Soit (v_n) la suite géométrique de 1^{er} terme $v_0 \in \mathbb{R}^*$ et de raison $q (q \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\})$. Si $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est strictement décroissante.

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés à trou du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé à trou		Réponses
1.	Si ABC est un triangle équilatéral de sens direct et B' est le milieu de $[AC]$. Alors $r_{(B,\frac{2\pi}{3})} \circ r_{(C,\frac{2\pi}{3})}$ est ...	A	la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$.
		B	la rotation $r_{(B',\frac{4\pi}{3})}$.
		C	La rotation $r_{(A,-\frac{2\pi}{3})}$.
		D	l'application identique.
2.	La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \sin(\pi n)$ ...	A	n'admet pas de limite .
		B	converge vers 0.
		C	diverge vers $+\infty$.
		D	diverge vers $-\infty$.
3.	Le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie : $2\lvert z-i\rvert = \lvert z-\overline{z}+2i\rvert$ est ...	A	une droite.
		B	une demi-droite.
		C	un cercle.
		D	une parabole.
4.	Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \ln(e^{v_n}+1) \end{cases}$ (v_n) est une suite ...	A	géométrique de raison 1.
		B	arithmétique de raison 1.
		C	qui n'est ni géométrique, ni arithmétique.
		D	constante.

EXERCICE 3

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+i)\,z_n \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1) Démontrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme .

2) Démontre que $arg(z_n) \equiv \dfrac{n\pi}{4}\,[2\pi]$.

3) a) Déduis-en une condition nécessaire et suffisante pour que M_n appartienne à l'axe des réels.

   b) Détermine le lieu géométrique des points M'_{n+1} lorsque M_n décrit le cercle trigonométrique.

4) Démontre que pour tout entier naturel n, les triangles OM_nM_{n+1} sont rectangles en M_{n+1}.

5) On pose : $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$

   a) Calcule I_n en fonction de n.

   b) Détermine la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4

Soit ABC triangle rectangle en A tel que $Mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. On note O le milieu de $[BC]$.

1) Démontre qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = O$ et $f(C) = B$

2) a) Démontre que f est une symétrie glissée.

   b) Détermine ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$. On note f', f'',....,$f^{(n)}$ les dérivées successives de f.

1) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$.

2) On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}$.

   a) Justifie que $\forall p \geq 1$, $\dfrac{p-1}{p!} = \dfrac{1}{(p-1)!} - \dfrac{1}{p!}$.

   b) Déduis-en que $S_n = 1 - \dfrac{1}{n!}$ puis calcule la limite de S_n, quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 6

Une entreprise achète un véhicule à un coût de 30.000.000 F. Ce véhicule se déprécie de 20 % par an. Pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 3 % par an. L'entreprise prévoit remplacer ce véhicule dans 5 ans en le revendant à un employé si la différence du prix d'achat du nouveau véhicule et le prix de revente de l'ancien véhicule n'excède pas 25.000.000 F.

Ton père est employé dans cette société et désire acquérir le véhicule au bout de 5 ans si son prix n'excède pas les 25.000.000 F. Il se demande si la société acceptera de lui céder ce véhicule. Il te sollicite pour savoir s'il peut l'acheter.

En utilisant tes connaissances mathématiques, donne-lui une réponse argumentée.

10

LYCEE SCIENTIFIQUE
YAMOUSSOUKRO

ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022
DUREE : 2h30mn

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Terminale C

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1 sur 2 et 2 sur 2.

EXERCICE 1

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2.	L'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ où k est un réel strictement positif est un cercle.
3.	Si une fonction f n'est pas définie en a alors nécessairement la droite $(D) : x = a$ est une asymptote verticale à (C_f).
4.	Pour tous points A, B et C du plan, l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right) = 0$ est une droite.

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés à trou du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé à trou	Réponses	
1.	Une valeur approchée à 10^{-1} près de l'unique solution dans $[-1;0]$ de l'équation $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ est ...	A	$-0,8$.
		B	$-0,4$.
		C	-1.
		D	0.
2.	Dans le triangle équilatéral de sens direct ABC,l'ensemble des points M du plan tels que $Mes(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{6}$ est ...	A	$\overset{\frown}{AB} \setminus \{A,B\}$ dans le cercle circonscrit au triangle ABC.
		B	$\overset{\frown}{AB} \setminus \{A,B\}$ dans le cercle de centre C passant par A.
		C	$\overset{\smile}{AB} \setminus \{A,B\}$ dans le cercle de centre C passant par A.
		D	l'ensemble vide.
3.	Dans le carré $ABCD$ de centre I, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = 0$	A	la droite passant par I de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
		B	l'ensemble vide.
		C	le plan.
		D	la droite passant par I de vecteur normal $\overrightarrow{AD}$.
4.	Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ et (Γ) sa courbe représentative alors ...	A	(Γ) admet une asymptote d'équation $y = x$.
		B	(Γ) n'admet pas d'asymptote .
		C	(Γ) admet une asymptote d'équation $x = 1$.
		D	(Γ) admet une asymptote d'équation $y = 2$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f'(x)$	-1 ↘		-5 ↗		-3 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘		-2

1) a) Donne l'ensemble de définition f.

 b) Donne les limites de f en -3 ; en 0 et en $+\infty$ puis interpréter éventuellement ces limites.

 c) Détermine les limites suivantes : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f\left(\dfrac{x^3+2x+1}{-2+x+x^2}\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

2) Trace l'allure de la courbe représentative (C) de f.

3) Détermine $f([-3;-1])$.

4) Justifie que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

5) Soit g la restriction de f à $]0;+\infty[$.

 a) Justifie que g est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

 b) Dresse le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1} de g.

EXERCICE 4

Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

On pose : $a=BC$; $b=AC$ et $c=AB$.

1) Démontre que : $GA^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$.

2) On admet que : $GB^2=\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{9}$ et $GC^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{9}$.

 a) Démontre que pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

 b) Démontre que , on a :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

 (*On calculera de deux manières* $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$.)

3) Déduis-en que tout point d'intersection M des cercles de diamètre $[AA']$ et $[BC]$ appartient à un autre cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

DEVOIR DE MATHEMATIQUES TC4

La durée du devoir est de 2 h

EXERCICE 1 : (points)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris sur ta copie le numéro de la ligne suivi de la lettre V si l'affirmation est vraie ou bien de la lettre F si l'affirmation est fausse. (Exemple : 1 V ou 1 F) .

N°	affirmation	réponse
1	$2022^{2023}-3$ est un multiple de 5	
2	Si une fonction f n'est pas dérivable en a alors elle n'est pas continue en a	
3	Si $ab \equiv o[\![6]\!]$ alors $a \equiv o[\![6]\!]$ ou $b \equiv o[\![6]\!]$	
4	Si $2x \equiv 4[\![12]\!]$ alors $X \equiv 2[\![12]\!]$	

EXERCICE 3 : (points)

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur [1 ; +∞ [par $g(x) = 2-\sqrt{x^2-x}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2)On suppose que g est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

a- Justifier que $g'(x)=\dfrac{-4x^2+3x}{2\sqrt{x^2-x}}$.

b-Justifier que la fonction g est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de g.

1) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $]1\,;+\infty[$ et que $1,7 \prec \alpha \prec 1,8$
2) Démontrer que $\forall x \in [1,\alpha[, g(x) \succ 0$ et $\forall x \in]\alpha,+\infty[, g(x) \prec 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur [1 ; +∞ [par $f(x)=1-x+4\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}$.(C) désigne la courbe de f. unité graphique

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.

3) On suppose que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

a- Justifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\sqrt{x^2 - x}}$.

b- En déduire les variations de f .

4) Justifier que $f(\alpha) = 2\alpha^2 - 3\alpha + 1$ puis dresser le tableau de variation de f

5) a- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 5$ est asymptote à la courbe (C) .

b-Justifier que la droite (D) est au dessus de la courbe (C).

6 Soit h la restriction de f à $[\alpha, +\infty[$.

a- Démontrer que h est une bijection de $[\alpha, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') la courbe de la bijection h^{-1}

b- Calculer h(2) puis h' (2).

c-Justifier que la bijection h^{-1} est dérivable en $-1 + 2\sqrt{2}$ puis calculer $(h^{-1})'(-1 + 2\sqrt{2})$.

7) Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe (OI) en un seul point B d'abscisse β et que $4,5 \prec \beta \prec 4,6$.

8) Tracer (D), puis construire (C) et (C') dans le même repère. On prendra $\alpha = 1,7$ et $\beta = 4,5$

<u>EXERCICE 3 : (points)</u>

1 Déterminer suivant les valeurs entières de n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 11

2 Démontrer que pour tout entier naturel n , 7 divise $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$

YCEE SCIENTIFIQUE
AMOUSSOUKRO

ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022
DUREE : 3h30mn

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Terminale C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3,2/3 et 3/3.

EXERCICE 1

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** i l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1.	La fonction logarithme népérien est positive sur $]0;+\infty[$.
2.	Toute droite orthogonale à un vecteur directeur d'un plan est orthogonale à ce plan
3.	La primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui prend la valeur e en 1 est la fonction logarithme népérien.
4.	Deux vecteurs orthogonaux définissent un plan.

EXERCICE 2

'our chacun des énoncés à trou du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une eule permet d'avoir l'énoncé juste.

cris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

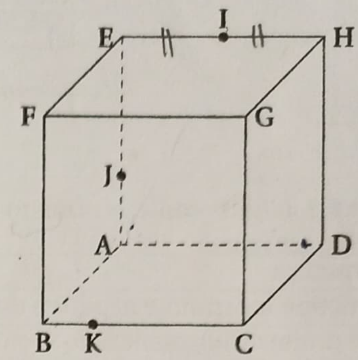
N°	Énoncé à trou	Réponses	
1.	Le plan contenant la droite $(\mathscr{D})$ de systèmes d'équations cartésiennes $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ et la droite $(\mathscr{D}')$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -3+t \\ y = 2-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2-2t \end{cases}$ a pour équation cartésienne ...	A	$-x+3y-2z-5=0$.
		B	$-x+3y-2z-4=0$.
		C	$-x+3y-2z+4=0$.
		D	$-x+3y-2z+5=0$.
2.	Le plan $(\mathscr{P})$ passant par les points $A(1,0,-2)$ et $B(0,-1,1)$ et perpendiculaire au plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $x-y+z=1$ a pour équation cartésienne ...	A	$-2x+2y+z=0$.
		B	$x+2y+z+1=0$.
		C	$-x+2y+z+1=0$.
		D	$x+2y+z+3=0$.
3.	L'ensemble de définition de la fonction , f définie par : $f(x)=\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)$	A	$]0;1/2[$.
		B	$]0;2[$.
		C	$]-\infty;0[\cup]1/2;+\infty[$.
		D	$]1/2;+\infty[$.
4.	La dérivée de la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left\lvert\frac{x+2}{x^2}\right\rvert$ est ...	A	$f'(x)=\frac{x+4}{x(x+2)}$.
		B	$f'(x)=-\frac{x(x+2)}{x^2}$.
		C	$f'(x)=-\frac{x(x+2)}{x^2}$.
		D	$f'(x)=-\frac{x+4}{x(x+2)}$.

EXERCICE 3

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.
On désigne par :

— I le milieu de $[EH]$.
— J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.
— K le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(C,1)$.

On munit l'espace $\mathscr{E}$ du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) Détermine les coordonnées des points I, J, K et G.

b) Déduis-en que :
— I, J, K définissent un plan.
— I, J, K et G sont coplanaires.

2) Démontre qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :
$-2x + 4y - 3z + 1 = 0$.

3) Soit P le projeté orthogonal de G sur le plan (IJK).

a) Calcule la distance de P au plan (IJK).

b) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (PG).

4) a) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.

b) Détermine les coordonnées de L, point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (AB).

5) Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par le centre O du cube et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
Détermine la position relative des deux plans $(\mathscr{P})$ et (IJK).

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1. Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par : $g_n(x) = \dfrac{x-1}{x} - n\ln x$ et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$, par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{\ln x} & si\, x \in]0, +\infty[\setminus\{1\} \\ f_n(0) = f_n(1) = 0. \end{cases}$. On désigne par (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On prendra 12cm pour unité graphique.

1) Détermine $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g_n(x)$.

2) a) Justifie que pour tout x élément de $]0, +\infty[$, calcule $g_n'(x) = \dfrac{1-nx}{x^2}$.

b) En déduire les variation de g_n puis dresse le tableau de variation de g_n.
(On ne calculera pas $g_n\left(\frac{1}{n}\right)$ ni la limite de g_n en $+\infty$.)

c) Calcule $g_n(1)$ puis déduis que $g_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0$

3) a) Démontre que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $\left]0; \frac{1}{n}\right[$ et que $0,2 < \alpha_2 < 0,3$.

b) Démontre que pour tout $x \in]0; \alpha_n[\cup]1; +\infty[$, $g_n(x) < 0$ et que pour tout $x \in]\alpha_n, 1[$, $g_n(x) > 0$.

4) a) On admet que f_n est continue en 0. Etudie la dérivabilité de f_n à droite en 0, puis interprète graphiquement le résultat.

b) Démontre que f_n est dérivable en 1.

c) f_n est-elle continue en 1 ? Justifie.

5) a) Calcule suivant la parité de n, la limite de f_n en $+\infty$.

b) On admet que la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ en $+\infty$ est $+\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair. Interprète graphiquement le résultat.

6) a) Démontre que pour tout $x \in]0;+\infty[\setminus\{1\}$, $f_n'(x) = \dfrac{(1-x)^{n-1}g_n(x)}{\ln^2(x)}$.

b) Détermine suivant la parité de n, le signe de $f_n'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f_n suivant la parité de n.

7) a) On admet que toutes les courbes (C_n) passent par exactement deux points. Précise les.

b) Détermine suivant la parité de n, les positions relatives de (C_n)et (C_{n+1}).

8) Trace sur le même graphique les courbes (C_2), (C_3)et (C_4).
On prendra $\alpha_2 = 0,3$, $\alpha_3 = 0,1$ et $\alpha_4 = 0,09$.